Gottlob Frege

# Fundamentos de la Aritmética

Investigación lógico-matemática
sobre el concepto de número

Con un estudio de **Claude Imbert**
y prólogo de **Jesús Mosterín**

editorial laia/barcelona

La edición original alemana fue publicada en Breslau, con *Die Grundlagen der Arithmetik*, por la editorial Max und Mascus.

El estudio de Claude Imbert fue publicado en París, por Éd Seuil, en 1969.



Prólogo de Jesús Mosterín
Versión castellana de Ulises Moulines
Primera edición castellana, octubre, 1972
Segunda edición: noviembre, 1973
Diseño y realización de la cubierta: Enric Satué

Impreso en Gráficas Saturno, Andrés Doria, 29, Barcelona-3
Depósito legal: B. 43954-1973
ISBN: 84-7222-454-6
Printed in Spain - Impreso en España

# Prólogo

Si lo que hoy entendemos por lógica comienza en 1879 con la publicación de *Begriffsschrift*, de Frege, lo que hoy entendemos por filosofía de la matemática se inicia cinco años más tarde, en 1884, con la publicación de la (en opinión de Michael Dummet) [1] obra maestra de Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik* (Los fundamentos de la aritmética).

Toda la obra —incluso toda la vida— de Frege está dedicada al esfuerzo por entender a fondo qué son los números naturales y de dónde les viene a los teoremas aritméticos su peculiar e inigualable seguridad. En especial, *Die Grundlagen der Arithmetik* es la obra destinada a dilucidar la naturaleza de los números. Bertrand Russell ha escrito: «La cuestión de qué sea un número ha sido planteada con frecuencia, pero sólo ha encontrado una respuesta correcta hasta ahora: la dada por Frege en 1884, en su *Die Grundlagen der Arithmetik*.» [2] Y Ernst Zermelo, el fundador de la teoría axiomática de conjuntos, no ha vacilado en afirmar que esta obra contiene lo mejor y lo más claro que nunca se haya escrito sobre el concepto de número.[3]

## Primera aproximación

Frege empieza diciendo lo que los números *no* son: los números no son cosas materiales, ni conjuntos, montones o configuraciones de cosas materiales; y no son propiedades de co-

[1] Michael DUMMET: *Gottlob Frege*. En *The Encyclopedia of Philosophy* (ed. P. Edwards), vol. 3, p. 226. New York, 1967.
[2] Bertrand RUSSELL: *Introduction to Mathematical Philosophy* p. 11, London, 1919.
[3] Ernst Zermelo, en nota a la recensión de *Die Grundlagen der Arithmetik* por Cantor, publicada en Georg CANTOR: *Gesammelte Abhandlugen* (editadas por E. Zermelo), p. 441. Berlín, 1932.

sas materiales. Pero tampoco son algo subjetivo. Y no se confunden con los signos que se refieren a ellos.

¿Qué son, pues, los números? Siguiendo su propio principio de no preguntar por el significado de las palabras aisladamente, sino en el contexto de los enunciados en que aparecen, Frege constata que los enunciados numéricos dicen algo no acerca de objetos, sino acerca de conceptos. Y, en una primera aproximación,[4] propone definir recursiva y contextualmente (en el contexto de un enunciado del tipo «el número *n* corresponde al concepto *P*») los números naturales del siguiente modo:

*a*) El número 0 corresponde al concepto *P* si ningún objeto cae bajo *P*.

*b*) El número n+1 corresponde al concepto *P* si hay un objeto *a*, tal que *a* cae bajo *P* y el número *n* corresponde al concepto «cae bajo *P*, pero es distinto de *a*».

Así sólo habríamos definido cada número natural *n* en enunciados del tipo «el número *n* corresponde al concepto *P*», pero no en las ecuaciones, que constituyen el tipo más frecuente de teorema matemático. Y tampoco habríamos definido el concepto de número, en general. La primera aproximación es, pues, insuficiente.

A continuación nos ofrece Frege su concepción de lo que son los números.

La dilucidación definitiva del concepto de número por Frege se realiza en dos etapas: en la primera se define el concepto de número cardinal, en general; en la segunda, se precisa el de número natural o finito.

## Definición de número cardinal

Una relación de equivalencia entre elementos de una clase determinada es una relación reflexiva, simétrica y transitiva en esa clase.

Una relación de equivalencia *R* en una clase determinada *A* da lugar a una partición de esa clase en clases de equivalencia. Si *b* es un elemento de *A*, la clase de equivalencia de *b* es la clase de todos los elementos de *A* que están con *b* en la relación *R*.

Una manera frecuente de definir entidades matemáticas

[4] Gottlob Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik.* § 55. Breslau, 1884.



consiste en definirlas como las clases de equivalencia inducidas por una determinada relación de equivalencia en una clase previamente dada de elementos.

Consideremos la clase de las rectas de un plano. Y supongamos dada la relación de paralelismo entre ellas. La relación de paralelismo es una relación de equivalencia. Por tanto, la relación de paralelismo da lugar a una partición de la clase de las rectas en clases de equivalencia, a las que llamamos direcciones. La dirección de una recta *b* no es sino la clase de equivalencia de *b* respecto a la relación de paralelismo, es decir, la clase de todas las rectas paralelas a *b*.

La idea central de Frege consiste en aplicar este mismo proceso para obtener una definición de número cardinal. Ello exige contar con un dominio previamente dado de elementos y definir en él una adecuada relación de equivalencia.

Como dominio previo de elementos elige Frege la clase de los conceptos. Como relación de equivalencia entre conceptos define Frege la relación de biyectabilidad: El concepto *P es biyectable* (o está en la relación de biyectabilidad) *con* el concepto *Q* si y sólo si hay una biyección (o aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo *P* y los objetos que caen bajo *Q*. Con otras palabras, *P* es biyectable con *Q* si y sólo si hay una relación que relaciona cada objeto que cae bajo *P* con un (y sólo un) objeto que cae bajo *Q*, y a la inversa.

Está claro que la relación de biyectabilidad es una relación de equivalencia. Por tanto, la relación de biyectabilidad da lugar a una partición de la clase de los conceptos en clases de equivalencia, a las que llamamos números cardinales. El número cardinal de un concepto *P* no es sino la clase de equivalencia de *P* respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con *P*. Es lo que Frege expresa en su peculiar terminología diciendo que el número que corresponde a un concepto *P* es la extensión del concepto «equinumérico al concepto *P*».[5]

[5] *Ibid.*, § 68, § 72. Frege no dispone explícitamente de la noción de clase de equivalencia. Su exposición sigue el siguiente orden: primero define la relación de equinumericidad (o biyectabilidad); en función de ella define después la noción de *número del concepto...*; y, en función de ella, define finalmente *número*, en general: una cosa es un número si, y sólo si, hay algún concepto *P*, tal que esa cosa es el número de *P*. Esta definición no es circular, pues la noción de *número del concepto...* se define con independencia de la de número.

## Definición de número natural

Con esto queda definido el concepto de número (cardinal) en general, finito o infinito. Pero la aritmética trata de los números naturales, es decir, de los números finitos. Ahora bien, la elucidación del concepto de número natural requiere algunas definiciones previas.

El 0 se define como el número que corresponde al concepto «distinto de sí mismo».[6] En otras palabras, el 0 es la clase de todos los conceptos vacíos, es decir, de todos los conceptos bajo los que no cae objeto alguno.

El 1 se define como el número que corresponde al concepto «igual a 0». En otras palabras, el 1 es la clase de todos los conceptos unitarios, es decir, de todos los conceptos bajo los que cae un solo objeto.

Que *n es el siguiente de m* significa según Frege que hay un concepto *P* y un objeto *a* que cae bajo él, tales que *n* es el número de *P* y *m* es el número del concepto «cae bajo *P* y es distinto de *a*».[7]

Una vez definido el 0 y *el siguiente*, Frege está en posición de darnos su definición de número natural.

*n es un número natural* (o cardinal finito) significa que *n* pertenece a la serie numérica que empieza por 0, es decir, que *n* es 0 o que *n* cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1 y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él.[8]

Fácilmente se ve que los números naturales así definidos satisfacen el quinto axioma de Peano, lo cual no es de extrañar, pues la definición que acabamos de dar equivale a decir que números naturales son precisamente los objetos que satisfacen el quinto axioma de Peano (o principio de la inducción aritmética).

Igualmente muestra Frege que los números naturales por él definidos satisfacen el resto de los axiomas de Peano. En especial, muestra que todo número natural tiene un siguiente indicando que para cada número natural *n*, el número natural que corresponde al concepto «pertenece a la serie numérica que termina con *n*» es el siguiente de *n*. Parece discutible que esto constituya una verdadera demostración. Pero Frege tampoco pretende ofrecer aquí pruebas rigurosas de los principios aritméticos.

[6] *Ibid.*, § 74.
[7] *Ibid.*, § 76.
[8] *Ibid.*, § 79, § 83.



## Analítico y sintético

Kant había establecido la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos. Basándose en el insuficiente análisis de la estructura de los enunciados ofrecido por la lógica aristotélico-tradicional, Kant supone que todos los enunciados (al menos todos los enunciados científicos) son del tipo sujeto-predicado, es decir, tienen la forma «todos los *A* son *B*», donde *A* y *B* son conceptos. Kant piensa también que todo concepto es una suma de características (o propiedades comunes a los objetos que caen bajo él). Pues bien, Kant define los enunciados analíticos como aquellos en que el predicado está contenido en el sujeto (es decir, en que todas las características del concepto *B* son también características del concepto *A*), y los sintéticos como aquellos en que el predicado no está contenido en el sujeto (es decir, en que algunas características de *B* no se encuentran entre las características de *A*).[9]

Sin embargo, está claro que esta definición kantiana sólo es aplicable a enunciados del tipo «todos los A son B». Pero la *Kritik der reinen Vernunft* de Kant está fundamentalmente dedicada a analizar el status epistemológico de los teoremas de la aritmética, la geometría euclídea y la mecánica newtoniana. De estos teoremas se pregunta Kant si son analíticos o sintéticos (y, en este último caso, si a priori o a posteriori). Ahora bien, esta pregunta carece de sentido si tomamos al pie de la letra la definición kantiana de analítico y sintético. En efecto, los típicos teoremas de estas teorías (enunciados como: «para cualesquiera n, m: $(n+m)^2 = n^2+m^2+2nm$; «hay al menos tres puntos distintos que no están en la misma recta»; «dos cuerpos cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia», etc.) tienen una estructura completamente distinta a los del tipo «todos los *A* son *B*», que son los únicos a los que se aplica la definición kantiana.

Igualmente se puede comprobar sin dificultad que la con-

[9] Immanuel Kant: *Kritik der reinem Vernunft.* Einleitung IV (pp. 6-7 de la 1.ª edición, Riga, 1781; o pp. 10-11 de la 2.ª edición, Riga, 1787).

cepción leibniziano-kantiana según la cual los conceptos serían definibles como sumas de características es insostenible en la mayor parte de los casos. Otra razón más para rechazar la definición kantiana.

Aunque Frege formula estas críticas,[10] considera sin embargo que la distinción entre analítico y sintético sigue siendo interesante. Pero estos términos han de ser definidos de nuevo.

Según Frege un enunciado verdadero es analítico si puede ser probado o deducido a partir únicamente de leyes lógicas y definiciones. En caso contrario decimos que se trata de un enunciado sintético.[11]

Ya en el prólogo a *Begriffsschrift* Frege se había preguntado si los teoremas aritméticos son deducibles a partir de sólo leyes lógicas o si es preciso traer a colación hechos empíricos para su prueba. Y aquí, en *Die Grundlagen der Arithmetik*, vuelve Frege a plantearse el mismo problema: ¿son los enunciados verdaderos de la aritmética analíticos o sintéticos?

## El programa logicista

La conclusión de *Die Grundlagen der Arithmetik* se inicia con la solemne formulación de la tesis logicista: Los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. Cada concepto aritmético es definible en función de conceptos puramente lógicos. Cada teorema aritmético es deducible a partir de leyes puramente lógicas. Calcular es deducir. La aritmética se reduce a la lógica.

De todos modos Frege reconoce que en esta obra no ha probado la tesis logicista, sino que se ha limitado a motivarla, exponerla y hacerla verosímil. Su demostración definitiva ha de venir de la formalización de la lógica y de la deducción formal de los teoremas aritméticos con los solos medios del cálculo lógico. La primera tarea —la formalización de la lógica— ya se había llevado a cabo por Frege cinco años antes, en *Begriffsschrift*. La segunda tarea —la deducción formal de los teoremas aritméticos con los solos medios de cálculo lógico— quedaba pendiente. El programa logicista consistía precisamente en demostrar definitivamente la tesis logicista —la reducción de la aritmética a la lógica— mediante la realización de esa segunda tarea.

[10] Gottlob FREGE: *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 88. Breslau. 1884.
[11] *Ibid.*, § 3.



Frege dedicó los veinte años siguientes a la publicación de la obra aquí presentada, a llevar a cabo la tarea señalada por el programa logicista. Con la publicación en 1893 y 1903 de los dos tomos de *Die Grundgesetze der Arithmetik*, parecía que el programa logicista había llegado a feliz término. Los principales teoremas aritméticos quedaban formalmente deducidos dentro del cálculo lógico (una versión ligeramente modificada del presentado en *Begriffsschrift*). Pero resulta que mientras el segundo volumen de *Die Grundgesetze der Arithmetik* estaba en prensa, Frege recibió una carta en que Bertrand Russell le comunicaba que había descubierto una contradicción en su cálculo lógico.[12] Con ello, el programa logicista se venía abajo.

La contradicción descubierta por Russell no era peculiar al sistema de Frege, sino común a todos los sistemas (incluida la teoría de conjuntos de Cantor) que emplearan de un modo ingenuo e intuitivo la idea de clase o de conjunto. Esta idea estaba representada en *Die Grundgesetze der Arithmetik* por la noción de *recorrido (Wertverlauf)* y en *Die Grundgesetze der Arithmetik* (la obra aquí presentada) por la noción de *extensión de un concepto (Umfang eines Begriffes)*. Y no deja de tener cierta ironía el hecho de que Frege, que con tanta sutileza, cuidado e incluso pedantería analiza y define cada noción técnica que emplea, se conforme con despachar la noción de *extensión de un concepto* en una nota a pie de página, en la que se limita a suponer que «ya se sabe lo que es la extensión de un concepto».[13]

En realidad, en 1884 se estaba muy lejos de saber lo que era la extensión de un concepto y no se sospechaba siquiera cuánta complejidad y peligro encerraba la (equivalente) idea de clase.

Desde 1902, en que Russell comunicó a Frege la contradicción que había descubierto en su sistema lógico, hasta su muerte, Frege luchó en vano por encontrar una solución que salvase la tesis logicista y evitara la contradicción descubierta por Russell. Finalmente, desesperó de poder encontrar solución al problema e incluso, poco antes de su muerte, renunció a la tesis logicista y empezó a explorar la posibilidad de encontrar en la geometría la fundamentación de la aritmética.

[12] Traducción inglesa de la carta de Bertrand Russell (escrita originariamente en alemán) en Van HEIJENOORT: *From Frege to Gödel*, pp. 124-125. Cambridge Mass., 1967.
[13] Gottlob FREGE: *Die Grundlangen der Arithmetik*. § 68, nota. Breslau, 1884.

Un año antes de su muerte, Frege escribe en su diario: «Mis esfuerzos por aclarar lo que sean los números han conducido a un completo fracaso.» [14] Y en el último manuscrito conservado de Frege leemos: «Me he visto obligado a abandonar la opinión de que la aritmética sea una rama de la lógica y por tanto que todo en la aritmética puede ser probado lógicamente.» [15] No sólo acabó el viejo Frege renunciando a la tesis logicista, sino que también fue consciente de que el fracaso de su construcción se debía al uso de la noción de *extensión de un concepto*, equivalente a la de clase o conjunto. Incluso llegó a sostener que no hay objeto alguno que sea la extensión de un concepto. La expresión «la extensión del concepto *P*» —escribe Frege en otro de sus últimos manuscritos— «parece designar un objeto a causa del artículo determinado; pero no hay objeto alguno al que así pudiéramos designar correctamente. De aquí han surgido las paradojas de la teoría de conjuntos que han aniquilado esa teoría. Y tratando de fundamentar lógicamente los números, yo mismo he caído en esa trampa, al querer considerar los números como conjuntos...» [16]

La filosofía posterior de la matemática ha girado en torno al problema de cómo salir de la trampa en que Frege y Cantor cayeron. Aunque se han propuesto diversas salidas y se han explorado nuevos caminos, aún estamos lejos de una solución definitiva. Y mucho de lo que hemos ganado en técnica, sofisticación y conocimiento, lo hemos perdido en contundencia, frescura creadora y entusiasmo. Por eso es tan reconfortante volver a leer a Frege.

JESÚS MOSTERÍN - *Barcelona, julio de 1972*

[14] Gottlob FREGE: *Nachgelassene Schriften* (editados por H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach), p. 282. Hamburg, 1969.
[15] *Ibid.*, p. 298.
[16] *Ibid.*, pp. 288-289.

# Introducción

*A la pregunta de qué es el número uno, o de qué denota el signo 1, se suele responder: pues una cosa. Y si se hace notar entonces que el enunciado*

*«el número uno es una cosa»*

*no es una definición, porque a un lado se halla el artículo determinado y al otro, el indeterminado, y que tal enunciado sólo expresa que el número uno pertenece a las cosas, pero no nos dice qué cosa es, entonces quizá quien nos ha formulado la pregunta nos invitará a que escojamos una cosa cualquiera, a la que decidamos llamar uno. Pero si todos tuviesen derecho a entender bajo este nombre lo que quisieran, resultaría que el enunciado anterior sobre el uno se referiría a cosas distintas para distintas personas; no habría ningún contenido común a tales enunciados. Algunos rechazarán tal vez esta cuestión, señalando que tampoco puede especificarse el significado de la letra* a *en la aritmética; y si se dice:* a *se refiere a un número, se caería en el mismo error que en la definición: uno es una cosa. Ahora bien, rechazar la cuestión en el caso de* a *está totalmente justificado: no se refiere a ningún número determinado, especificable, sino que sirve para expresar la generalización de ciertos enunciados. Si en* «a+a—a=a»*, se sustituye* a *por un número cualquiera, pero el mismo en todas partes, se obtiene siempre una ecuación verdadera. Es en este sentido que se utiliza la letra* a. *Pero en el caso del uno, en cambio, la cuestión aparece esencialmente distinta. En la ecuación «1+1=2», ¿podemos acaso sustituir 1 las dos veces por el mismo objeto, la luna, por ejemplo? Más bien parece que lo que sustituya al primer uno debe ser algo distinto de lo que sustituya al segundo. ¿Por qué razón tiene que ocurrir aquí precisamente lo que en el otro caso sería un error? La aritmética no puede contentarse con la sola letra* a, *sino que tiene que utilizar además* b, c, *etc.,*

*para poder expresar con generalidad las relaciones entre diversos números. Así, pues, podría pensarse que el número 1 tampoco es suficiente, si es que sirve, de manera análoga, para proporcionar generalidad a los enunciados. ¿Pero no aparece el número 1 como objeto determinado, con propiedades especificables, por ejemplo, la de que no varía al ser multiplicado por sí mismo? De* a, *en cambio, no puede especificarse ninguna propiedad en este sentido; pues lo que se afirma de* a *es una propiedad común a los números, mientras que «1'=1» no afirma nada de la luna, ni del sol, ni del Sáhara, ni del Pico de Tenerife; en efecto, ¿qué sentido podría tener una afirmación semejante?*

*La mayoría de matemáticos tampoco dispondrán de una respuesta satisfactoria a tales preguntas. ¿Pero no es vergonzoso para la ciencia que se halle en este estado de confusión ante el objeto que más le atañe y que es, aparentemente, tan simple? Todavía menos podrá decirse lo que es el número. Cuando un concepto que está en la base de una gran ciencia ofrece dificultades, es, sin duda, tarea ineludible investigarlo detenidamente y superar estas dificultades, especialmente porque resultará difícil llegar a clarificar completamente los números negativos, quebrados o complejos, mientras siga siendo defectuosa la comprensión de los fundamentos del edificio de la aritmética.*

*Naturalmente, muchos considerarán que esto no merece dedicarle esfuerzo alguno. Este concepto está ya tratado suficientemente, opinan ellos, en los libros de texto elementales, en los cuales se despacha la cuestión para toda la vida. ¡Quién cree poder aprender algo todavía acerca de una cosa tan sencilla! Tan libre de dificultades se considera el concepto de número entero positivo que es posible explicarlo a los niños científica y exhaustivamente, y además cada uno está bien informado sobre él, sin ulterior reflexión y sin tener conocimiento de lo que otros han pensado. Resulta, por tanto, que falta aquí, totalmente, el primer requisito del aprender: el conocimiento de la ignorancia. La consecuencia es que la gente todavía se contenta con una concepción burda, si bien ya Herbart*[1] *ha enseñado una concepción más correcta. Es lamentable y descorazonador que, de este modo, perdure la amenaza de la pérdida de un conocimiento que ya se había*

[1] *Obras completas*, editadas por Hartenstein, t. X, 1.ª parte: *Umriss pädagogischer Vorlesungen*, 252, nota 2: «Dos no quiere decir dos cosas, sino duplicar», etc.



*logrado, que tanto trabajo parezca así ser en vano, porque en el paraíso de los hombres ilustrados nos creamos que no es necesario asimilar los frutos de un conocimiento trabajosamente adquirido. También este trabajo, lo veo claro, está expuesto a semejante peligro. La vulgaridad de esta concepción se me hace patente cuando se describe el cálculo como pensamiento agregativo, mecánico.*[2] *Dudo que exista tal pensamiento en absoluto. La imaginación agregativa podría, incluso, dejarse pasar; pero carece de significación para el cálculo. El pensamiento es, en lo esencial, el mismo en todas partes: no pueden considerarse distintos tipos de leyes del pensamiento según el objeto a que se refieren. Las diferencias consisten solamente en la mayor o menor pureza e independencia de influencias psicológicas y de auxiliares externos del pensamiento, como lenguaje, signos numéricos y cosas parecidas, y quizá también en la precisión de la construcción de los conceptos; pero precisamente en este respecto pretende la matemática no ser superada por ninguna otra ciencia, ni siquiera por la filosofía.*

*De la presente obra podrá desprenderse que incluso una inferencia matemática aparentemente singular, como la que pasa de* n *a* n +1, *se basa en las leyes lógicas universales, que no necesita, por tanto, de leyes particulares del pensamiento agregativo. Naturalmente, los signos numéricos pueden usarse mecánicamente, al igual que se puede hablar como un papagayo; pero apenas puede llamarse a esto pensamiento. Esto tan sólo es posible después de que el lenguaje simbólico matemático se ha constituido por medio del pensamiento, de modo que piense por nosotros, como a veces se dice. Esto no prueba que los números estén constituidos de una manera especialmente mecánica, como un montón de arena está formado por gránulos de cuarzo. Creo que es del interés de los matemáticos combatir una opinión semejante, encaminada a desacreditar un objeto fundamental de su ciencia y, con él, a la ciencia misma. Pero incluso entre los matemáticos hallamos declaraciones muy parecidas. Por el contrario, habrá que reconocer al concepto de número una estructura más fina que la de la mayoría de conceptos de otras ciencias, si bien no es más que uno de los conceptos aritméticos más simples.*

*Y, para refutar la ilusión de que, con relación a los*

[2] K. Fischer: *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre (Sistema de lógica y metafísica o teoría de la ciencia)*, 2.ª edición, apartado 94.

*números enteros positivos no existe ninguna dificultad, sino que hay un acuerdo general, me ha parecido bien comentar algunas opiniones de filósofos y matemáticos sobre las cuestiones que aquí entran en consideración. Veremos cuán poco acuerdo puede hallarse, hasta el punto de que aparecen afirmaciones exactamente contrapuestas. Los unos dicen, por ejemplo: «las unidades son iguales entre sí»; los otros las consideran distintas, y las razones que ambos ofrecen para sus afirmaciones no pueden desestimarse sin más. Con esto trato de despertar el interés por una investigación más exacta. Al mismo tiempo, mediante el examen previo de las ideas manifestadas por otros, quiero preparar el terreno para mi propia concepción, para convencer de antemano de que esos otros caminos no llevan a la meta y de que mi opinión no es una más, entre otras muchas igualmente justificables; y con ello espero aclarar y definir definitivamente la cuestión, por lo menos en lo fundamental.*

*En consecuencia, mis argumentaciones serán, ciertamente, más filosóficas de lo que a muchos matemáticos puede parecerles adecuado; pero una investigación fundamental del concepto de número resultará siempre algo filosófica. Esta tarea es común a la matemática y a la filosofía.*

*Si la colaboración entre estas dos ciencias, a pesar de algunos intentos por ambas partes, no está tan desarrollada como sería de desear y como sería, sin duda, posible, radica esto, según creo, en el predominio de consideraciones psicológicas en filosofía, que penetran incluso en la lógica. Con esta orientación no tiene la matemática ningún punto de contacto, y por ello se explica fácilmente la aversión de muchos matemáticos a las consideraciones filosóficas. Cuando Stricker,*[3] *por ejemplo, dice que las imágenes de los números son motóricas, dependientes de sensaciones musculares, el matemático no puede reconocer ahí sus números y no sabe qué hacer con este enunciado. Una aritmética que estuviera basada en sensaciones musculares sería, ciertamente, muy sensitiva, pero resultaría tan confusa como su base. No, la aritmética no tiene nada que ver con las sensaciones. Tampoco con representaciones internas que se han formado a partir de las huellas de impresiones sensoriales anteriores. La vacilación e indeterminación que tienen de común todas estas formas contrasta fuertemente con la determinación y firmeza de los conceptos y objetos matemáticos. Ciertamente, puede ser útil examinar las imágenes que aparecen en el pensamiento matemático y ver sus cambios; pero que no se figure la psicología que va a poder aportar algo a la fundamentación de la aritmética. Al matemático en cuanto tal le son indiferentes estas representaciones internas, su nacimiento y modificación. El propio Stricker dice que, con la palabra «cien», no se imagina nada más que el signo 100. Otros pueden imaginarse la letra C o cualquier otra cosa; ¿no se desprende de ello que estas representaciones internas son, en nuestro caso, completamente indiferentes y casuales para lo esencial de la cuestión, tan casuales como una pizarra negra y un pedazo de tiza, y que no merecen, pues, ser calificadas de imágenes del número cien? ¡Lo esencial del problema no puede encontrarse en tales imágenes! No hay que tomar por definición la descripción de cómo surge una imagen, ni hay que considerar que la indicación de las condiciones mentales y corporales, para hacernos conscientes de un enunciado, constituyen su demostración, ni tampoco confundir el acto de pensar un enunciado con su verdad. Parece que hay que recordar que un enunciado no deja de ser verdadero cuando yo dejo de pensar en él, como el sol no es aniquilado cuando yo cierro los ojos. De lo contrario, acabaremos por considerar necesario que, en la demostración del teorema de Pitágoras, se tenga en cuenta el fósforo que contiene nuestro cerebro; y los astrónomos temerán extender sus conclusiones a épocas muy remotas, por miedo a que se les objete: «Estás calculando aquí $2 \cdot 2 = 4$; pero la imagen numérica tiene una evolución, una historia. ¿Cómo sabes tú que en esa época pasada ya valía este enunciado? ¿No pudieron tener los seres entonces vivientes el enunciado $2 \cdot 2 = 5$, del cual sólo por selección natural en la lucha por la existencia se desarrolló el enunciado $2 \cdot 2 = 4$, el cual, a su vez, está destinado a transformarse, por el mismo camino, en $2 \cdot 2 = 3$?»* Est modus in rebus, sunt certi denique fines! *El modo de consideración histórico, que trata de detectar el devenir de las cosas y de descubrir su esencia a partir de su devenir, tiene, sin duda, una gran justificación; pero también tiene sus límites. Si en el flujo continuo de todas las cosas no persistiera nada firme, eterno, desaparecería la inteligibilidad del mundo y todo se precipitaría en la confusión. Parece que algunos piensan que los conceptos nacen en el alma individual como las hojas en los árboles, y creen que pueden averiguar su esencia investigando su surgimiento y tratando de explicarlo psicológicamente*

[3] *Studien über Association der Vorstellungen (Estudios sobre la asociación de imágenes).* Viena, 1883.

*a partir de la naturaleza del alma humana. Pero esta concepción lo aboca todo a lo subjetivo y, si se prosigue hasta el fin, suprime la verdad. Lo que se llama historia de los conceptos es o bien una historia de nuestro conocimiento de los conceptos, o bien de los significados de las palabras. Es frecuente que sólo a través de una gran labor intelectual, que puede durar siglos enteros, se consiga conocer un concepto en su pureza, despojándolo de envolturas extrañas que le escondían al ojo de la mente. ¡Qué puede decírsele a alguien que, en vez de proseguir esta labor en el punto en el que aparece inacabada, considera que ésta no vale nada, se va al cuarto de los niños o evoca los estadios evolutivos de la humanidad más antiguos imaginables, para descubrir allí, como hace J. St. Mill, una aritmética de tarta de nueces o de guijarros! Sólo falta atribuir al sabor de la tarta una significación especial para el concepto de número. Pero esto es lo exactamente opuesto a un procedimiento racional y, en todo caso, no puede ser más antimatemático. No es de extrañar que los matemáticos no quieran saber nada de todo esto! En vez de hallar una pureza especial de los conceptos allí donde parece estar más cerca su origen, todo se ve confuso e indiferenciado, como a través de la niebla. Es como si alguien, para conocer bien América, quisiera retrotraerse a la situación de Colón cuando, por primera vez, vislumbró vagamente su supuesta India. Naturalmente, esta comparación no prueba nada; pero espero que aclare mi opinión. Puede muy bien ser que la historia de los descubrimientos sea en muchos casos útil para preparar investigaciones posteriores; pero no debe tratar de sustituir a estas últimas.*

*Respecto al matemático, apenas habría sido necesario combatir tales concepciones; pero dado que yo también quería solventar en lo posible para los filósofos las cuestiones discutidas, me he visto obligado a inmiscuirme un poco en la psicología, aunque sólo sea para rechazar su invasión en las matemáticas.*

*Por lo demás, también en libros de texto matemáticos aparecen expresiones psicológicas. Cuando uno se siente en el deber de dar una definición sin poder darla, se intenta entonces describir por lo menos la manera cómo se llega al objeto o concepto en cuestión. Este tipo de casos se detectan fácilmente por el hecho de que en el curso posterior de la exposición nunca más se vuelve a echar mano de tal explicación. Para fines didácticos, una introducción en el asunto es muy pertinente; sólo que habría que distinguirla siempre claramente de una definición. También los matemáticos pueden confundir los argumentos de una prueba con condiciones internas o externas de la realización de la misma; un ejemplo divertido de esto lo proporciona E. Schröder[4], cuando bajo el encabezamiento de «axioma único», nos ofrece lo siguiente: «El principio en el que estoy pensando podría bien llamarse axioma de la adherencia de los signos... Nos da la seguridad de que en todas nuestras argumentaciones y deducciones, los signos permanecen en nuestra memoria—o aún más firmemente sobre el papel, etc.»*



*Ahora bien, si las matemáticas no deben admitir ningún auxilio por parte de la psicología, en cambio, no pueden negar su estrecha conexión con la lógica. Estoy de acuerdo incluso con la opinión de aquellos que consideran inviable una separación tajante entre ambas. Por lo menos hay que admitir que cualquier examen del carácter concluyente de una demostración o de la justificación de una definición tiene que discurrir según la lógica. Tales cuestiones, empero, no pueden ser eliminadas de la matemática, ya que sólo respondiendo a ellas puede alcanzarse la seguridad necesaria.*

*También en esta dirección voy ciertamente algo más allá de lo usual. En investigaciones de este tipo, la mayoría de matemáticos quedan contentos cuando han satisfecho sus necesidades más inmediatas. Cuando una definición se presta a intervenir en demostraciones, cuando nunca da lugar a contradicciones, cuando por medio de ella se pueden establecer conexiones entre cosas aparentemente dispares, resultando así un orden y una regularidad superiores, entonces se suele considerar la definición suficientemente segura y se hacen pocas preguntas sobre su justificación lógica. Lo bueno de este procedimiento, en todo caso, es que hace difícil perder el hilo. También yo creo que las definiciones deben ser garantizadas por su fertilidad, por la posibilidad de hacer demostraciones con ellas. Pero hay que tener en cuenta que el rigor de la demostración sigue siendo una ilusión, aunque tengamos todos los eslabones de la deducción, si las definiciones sólo se justifican posteriormente por el hecho de que no se haya chocado con ninguna contradicción. De este modo, en definitiva, sólo se ha conseguido una seguridad empírica y, en realidad, hay que tener en cuenta la posibilidad de encontrar al final una contradicción que derrumbe el edificio ente-*

[4] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra (Manual de aritmética y álgebra).*

*ro. Por eso he creído que debía retroceder hasta los fundamentos lógicos generales, más de lo que quizá la mayoría de los matemáticos consideran necesario.*

*En esta investigación me mantendré en los siguientes principios fundamentales:*

*hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;*

*el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas;*

*hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto.*

*Para seguir el primer principio, he empleado la palabra «imagen» siempre en sentido psicológico, y he distinguido las imágenes de los conceptos y los objetos. Si no se tiene en cuenta el segundo principio, uno se ve casi forzado a tomar por significados de las palabras representaciones internas o actos de la mente individual, con lo cual también se entra en conflicto con el primer principio. Por lo que respecta al tercer punto, es sólo una ilusión el creer que se puede hacer de un concepto un objeto, sin modificarlo. De ahí resulta insostenible una teoría formal ampliamente difundida de las fracciones, números negativos, etc.[5] En esta obra sólo podré indicar cómo pienso perfeccionar esta teoría. De lo que se trata en todos estos casos, lo mismo que para los números enteros positivos, es de fijar el sentido de una ecuación.*

*Creo que mis resultados obtendrán, por lo menos en lo fundamental, la aprobación de los matemáticos que acepten el trabajo de tomar en consideración mis razones. Éstas me parece que están en el aire y todas ellas, o por lo menos otras muy parecidas, han sido quizás manifestadas ya, cada una por separado; pero relacionadas entre sí, puede que aparezcan como nuevas. A veces me he asombrado de que exposiciones que en un punto se acercan mucho a mi concepción, en otros, en cambio, se aparten tan radicalmente.*

*La aceptación, por parte de los filósofos, será diversa según los puntos de vista; la peor, seguramente, vendrá de parte de aquellos empiristas que sólo están dispuestos a admitir como modo de inferencia originario la inducción, y a ésta ni siquiera como modo de inferencia, sino como hábito. Quizás alguno aproveche esta ocasión para someter a una nueva prueba los fundamentos de su teoría del conocimiento. A aquellos a quienes mis definiciones pueden parecerles antinaturales, les querría recordar que de lo que aquí se trata no es de si son naturales, sino de si llegan al núcleo de la cuestión y de si son lógicamente irreprochables.*

*Me permito tener la esperanza de que, después de un examen sin prejuicios, también los filósofos hallarán alguna utilidad en este escrito.*

[5] Frege se refiere aquí sobre todo a la teoría *formalista* de Hankel, que luego criticará detalladamente en los apartados 97 ss. *(N. del T.)*

# PRIMERA PARTE

*Gottlob Frege*

## Los fundamentos de la aritmética

1. Después de haberse alejado por cierto tiempo del rigor euclídeo, la matemática retorna a él ahora e incluso trata de sobrepasarlo. En la aritmética, a consecuencia del origen indio de muchos de sus procedimientos y nociones, había aparecido un tipo de razonamiento más laxo que el de la geometría, creada principalmente por los griegos. Esta tendencia aún fue más acentuada por el descubrimiento del análisis superior; pues, por una parte, al tratamiento riguroso de estas teorías se oponían dificultades casi insuperables, cuya superación, por otra parte, no parecía ofrecer recompensa suficiente a los esfuerzos empleados en ella. No obstante, el desarrollo posterior ha mostrado cada vez más claramente que en las matemáticas no es suficiente un convencimiento puramente moral, apoyado por muchas aplicaciones convincentes. Para muchas cosas, que antes pasaban por evidentes, se exige ahora una demostración. Sólo así se han podido establecer, en algunos casos, los límites de la validez. Los conceptos de función, de continuidad, de límite y de infinito han demostrado necesitar definiciones más precisas. Los números negativos e irracionales, que habían sido admitidos en la ciencia desde hacía tiempo, han tenido que ser sometidos, para quedar justificados, a un examen más preciso.

En todas partes se constata el mismo esfuerzo por demostrar con rigor, trazar con precisión los límites de validez y, para poder hacer todo esto, comprender exactamente los conceptos.

2. Si proseguimos por este camino, deberá conducirnos al concepto de número y a los enunciados más simples válidos para los números enteros positivos, que constituyen la base de toda la aritmética. Evidentemente, fórmulas numéricas como «5+7=12» y leyes como la ley asociativa de la adición están tan bien confirmadas por las incontables aplicaciones que se hacen de ellas cotidianamente, que puede parecer casi ridículo ponerlas en duda, al exigir demostra-

ciones de ellas. Pero es esencial a la naturaleza misma de la matemática que, siempre que sea posible una prueba, prefiera ésta a la confirmación por inducción. Euclides demuestra muchas cosas que cualquier otro admitiría sin más. Y al no contentarnos ni siquiera con el rigor euclídeo, nos vimos llevados a las investigaciones relacionadas con el axioma de las paralelas.

De este modo, este movimiento dirigido al máximo rigor posible ha trascendido ya en mucho las necesidades sentidas originariamente y se ha desarrollado cada vez más en extensión e intensidad.

La prueba no tiene, ciertamente, como única finalidad establecer la verdad de un enunciado fuera de toda duda, sino también la de proporcionarnos la comprensión de la dependencia de las verdades entre sí. Después de que uno se haya convencido de la inconmovilidad de una roca ante la inutilidad de los esfuerzos para moverla, se puede preguntar qué es lo que la sostiene con tanta firmeza. A medida que se prosigue en estas investigaciones, se retrotrae todo a un número cada vez menor de verdades originarias; y esta simplificación es, por sí misma ya, un objetivo que merece la pena. Quizá también se pueda confirmar así la esperanza de que es posible obtener modos generales de formación de conceptos o de fundamentación de enunciados, que también sean aplicables a casos más complejos, al poner de manifiesto lo que los hombres han hecho instintivamente en la mayoría de los casos, sacando de aquí lo que pueda tener validez universal.

3. A tales investigaciones me han impulsado también motivaciones filosóficas. Las preguntas por la naturaleza a priori o a posteriori, sintética o analítica, de las verdades aritméticas esperan de este mismo campo su contestación. Pues, si bien estos conceptos, en sí mismos, pertenecen a la filosofía, creo, no obstante, que la decisión no podrá obtenerse sin el auxilio de la matemática. Naturalmente, esto depende del sentido que se atribuya a estas preguntas.

No es un caso infrecuente el de que primero se dé con el contenido de un enunciado y que luego, por un camino más fatigoso, se consiga la prueba rigurosa, por medio de la cual también suelen determinarse más exactamente las condiciones de validez. De ahí que, en general, haya que deslindar la cuestión de cómo hemos llegado al contenido de un juicio, de la referente a la justificación de nuestra afirmación.

Las distinciones antes mencionadas entre a priori y a posteriori, sintético y analítico no atañen, según mi opinión,[1] al contenido del juicio, sino a la legitimidad del acto de juzgar. Allí donde falta ésta, desaparece también la posibilidad de esta división. Un error a priori es, entonces, un absurdo igual que un concepto azul. Si un enunciado es calificado de a posteriori o analítico, desde mi punto de vista, no se están juzgando las circunstancias psicológicas, fisiológicas y físicas que han hecho posible formar el contenido del enunciado en la conciencia, ni tampoco de qué manera ha llegado otra persona, quizás erróneamente, a considerarlo verdadero, sino cuál es la razón última en que está basada la justificación de tenerlo por verdadero.

De este modo se arranca la cuestión del campo de la psicología y se asigna al de la matemática, si es que se trata de una verdad matemática. Su objetivo, pues, es encontrar la prueba y retrotraerla hasta las verdades originarias. Si, por este camino se llega a leyes lógicas generales y a definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, para lo cual se presupone que también se toman en consideración los enunciados en los que se basa la admisibilidad de una definición. Si, por el contrario, no es posible llevar a término la prueba sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético. Para que una verdad sea a posteriori se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos; es decir, a verdades indemostrables y sin universalidad, que contienen aseveraciones sobre objetos particulares. Si, por el contrario, es posible llevar a cabo la prueba partiendo de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas, entonces la verdad es a priori.[2]

4. Partiendo de estas cuestiones filosóficas, llegamos a la misma exigencia que, independientemente de ellas, ha surgido

[1] Con esto, naturalmente, no quiero introducir un nuevo sentido, sino referirme sólo a lo que han querido decir autores anteriores, Kant en especial.

[2] Si se acepta una verdad general, también hay que admitir que existen tales leyes primitivas, porque de puros hechos aislados no se sigue nada, como no sea por medio de una ley. Incluso la inducción se basa en el enunciado general de que este procedimiento puede fundamentar la verdad, o por lo menos cierta probabilidad, de una ley. Para el que niegue esto, la inducción no es más que un fenómeno psicológico, un modo por el que los hombres llegan a creer en la verdad de un enunciado, sin que esta creencia pueda ser justificada por ello de alguna manera.

en el dominio de la propia matemática: demostrar con el máximo rigor los principios de la aritmética, siempre que sea posible; pues únicamente si se evita, de la manera más cuidadosa posible, cualquier hueco que pueda aparecer en la cadena deductiva, podrá decirse con seguridad en qué verdades originarias se basa la prueba; y solamente cuando éstas sean conocidas, podrá contestarse a aquellas cuestiones.

Si se intenta satisfacer esta exigencia, muy pronto se llega a enunciados cuya demostración es imposible hasta tanto no se consigue descomponer los conceptos que aparecen en ellos en otros conceptos más simples, o bien reducirlos a algo más general. En nuestro caso es sobre todo el número lo que tiene que ser definido o ser reconocido como indefinible. Tal será la tarea de este libro.[3] De su resolución dependerá la decisión sobre la naturaleza de las leyes aritméticas.

Pero antes de abordar estas cuestiones, quiero anticipar algo que puede servir como indicador para la respuesta. Pues si, desde otros puntos de vista, resulta que hay razones para pensar que los principios de la aritmética son analíticos, éstas serán también un apoyo para la demostrabilidad de estos principios y para la definibilidad del concepto de número. Efecto inverso tendrán las razones en favor del carácter a posteriori de estas verdades. Por esto vamos a someter estos puntos de discusión, en primer lugar, a una clarificación rápida.

[3] En lo que sigue, pues, si no se dice otra cosa, no se tratará de más números que de los enteros positivos, los cuales responden a la pregunta: ¿cuántos?

Capítulo primero

# Opiniones de algunos autores sobre la naturaleza de los enunciados aritméticos

## ¿Son demostrables las fórmulas numéricas?

5. Hay que distinguir las fórmulas numéricas que tratan de números concretos, como «2+3=5», de las leyes generales que valen para todos los números enteros.

Las primeras son consideradas por algunos filósofos [1] como indemostrables y tan claras e inmediatas como los axiomas. Kant [2] afirma que son indemostrables y sintéticas, pero no se atreve a llamarlas axiomas, porque no son generales y porque su número es infinito. Con razón califica Hankel [3] esta admisión de un número infinito de verdades primitivas, de inadecuada y paradójica. Entra en conflicto con el hecho de que la razón necesita aprehender de una sola vez los primeros principios. Y, por lo demás, ¿es acaso evidente que

$$135\,664 + 37\,863 = 173\,527?$$

¡No! Y precisamente esto le lleva a Kant a sostener el carácter sintético de estos enunciados. Pero lo anterior más bien habla en contra de su indemostrabilidad. Pues, ¿de qué otra manera pueden ser aceptados, como no sea mediante una demostración, dado que no son directamente evidentes? Kant quiere ayudarse con la intuición de dedos o puntos, con lo cual cae en el peligro de hacer que estos enunciados aparezcan como empíricos, en contra de su propia opinión; pues la intuición de 37 863 dedos no es, en cualquier caso, una intui-

[1] Hobbes, Locke, Newton, V. Baumann: *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik (Las teorías del tiempo, el espacio y la matemática)*, pp. 241 y 242, pp. 365 ss., p. 475.

[2] *Crítica de la razón pura*, editada por Hartenstein, III, p. 157. (*N. del T.*: En las paginaciones originales, que son las utilizadas usualmente, esta cita corresponde a A164/B205).

[3] *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Functionen (Lecciones sobre los números complejos y sus funciones).*

ción pura. La expresión «intuición» tampoco parece apropiada, pues ya sólo 10 dedos, según las posiciones relativas que ocupen entre sí, pueden producir las más diversas intuiciones. ¿Tenemos una intuición, del tipo que sea, de 135 664 dedos o puntos? Si la tuviésemos, y tuviésemos también una intuición de 37 863 y otra de 173 527 dedos, sería inmediatamente evidente la corrección de nuestra ecuación, si ésta fuera indemostrable; pero éste no es el caso.

Es manifiesto que Kant pensaba sólo en números pequeños. Entonces, las fórmulas para grandes números serían demostrables, mientras que para números pequeños resultarían inmediatamente evidentes para la intuición. Pero es espinoso establecer una diferencia de principio entre números pequeños y grandes, particularmente porque no parece posible trazar una frontera clara entre ellos. Si las fórmulas numéricas fueran demostrables a partir de 10, pongamos por caso, entonces sería justo preguntar: ¿por qué no a partir de 5, de 2, de 1?

6. Otros filósofos y matemáticos, en cambio, han sostenido que las fórmulas numéricas son demostrables. Leibniz [4] dice:

«No es una verdad inmediata que 2 y 2 son 4; supongamos que 4 significa 3 y 1. Se la puede demostrar de esta manera:

Definiciones:
1. 2 es 1 y 1,
2. 3 es 2 y 1,
3. 4 es 3 y 1.

Axioma: Si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste.

Prueba: $2+2=2+1+1=3+1=4.$
Def. 1. Def. 2. Def. 3

Luego: por el axioma $2+2=4$».

Esta prueba parece estar construida, a primera vista, enteramente a partir de definiciones y del axioma citado. Incluso éste podría ser transformado en una definición, como hace el propio Leibniz en otro lugar.[5] Perece que de 1, 2, 3, 4 no se necesita saber nada más de lo que está contenido en las definiciones. No obstante, ante un examen más detenido, se descubre una laguna, encubierta por la omisión de paréntesis. Estrictamente, habría que escribir:

[4] *Nouveaux Essais*, IV, 10 (ed. de Erdmann, p. 363).
[5] *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (ed. de Erdmann, p. 94).



$$2+2=2+(1+1)$$

$$(2+1)+1=3+1=4.$$

Aquí falta el enunciado

$$2+(1+1)=(2+1)+1,$$

que es un caso especial de

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Si se presupone esta ley, es fácil ver que así es sencillo demostrar cualquier fórmula de la suma de uno. Entonces, habrá que definir cada número a partir del precedente. De hecho, no veo que un número como el 437 986 pueda venirnos dado de otra manera más adecuada que la de Leibniz. Así lo obtenemos, incluso sin tener una imagen de él, gracias a la potencia de nuestros medios. Mediante tales definiciones, el conjunto infinito de los números es reducido al uno y al aumento en uno, y cualquiera de las infinitas fórmulas numéricas puede ser demostrada a partir de algunos enunciados generales.

Ésta es también la opinión de H. Grassmann y de H. Hankel. El primero pretende obtener la ley

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

por medio de una definición, cuando dice:[6]

«Si $a$ y $b$ son dos miembros cualesquiera de la serie básica, se entiende por la suma $a+b$ aquel miembro de la serie básica para el cual vale la fórmula

$$a+(b+e)=a+b+e.»$$

Aquí $e$ significa la unidad positiva. A esta explicación pueden objetarse dos cosas. Primero, la suma es definida en términos de ella misma. Si no se sabe todavía lo que significa $a+b$, tampoco se entenderá la expresión $a+(b+e)$. Pero esta objeción quizás aún se podría evitar diciendo, en eviden-

[6] *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten (Manual de matemáticas para Institutos de segunda enseñanza).* Parte I: Aritmética, p. 4, Stettin, 1860.

te contradicción con el texto, que no es la suma, sino la adición lo que tiene que ser definido. A ello podría seguirse objetando que $a+b$ sería un signo vacío si no hubiera ningún miembro de la serie básica, o bien hubiera varios, que cumplieran lo exigido. Grassmann presupone sencillamente que esto no ocurre, sin demostrarlo, con lo cual el rigor es sólo aparente.

7. Podría pensarse que las fórmulas numéricas son sintéticas o analíticas, a posteriori o a priori, según que lo sean las leyes generales en las que se apoya su prueba. A esto, sin embargo, se opone la concepción de John Stuart Mill. Es verdad que primero parece que pretende, como Leibniz, fundamentar la ciencia en definiciones,[7] dado que define cada uno de los números igual que éste; pero su prejuicio de que todo saber es empírico echa a perder en seguida esta idea correcta. En efecto, nos enseña[8] que esas definiciones no son definiciones en sentido lógico, que no sólo fijan el significado de una expresión, sino que con ello también afirman un hecho observado. ¿Qué hay en el mundo que pueda ser el hecho observado o, como Mill también dice, el hecho físico que se afirma en la definición del número 777 864? De todo el reino de hechos físicos que aquí se nos presenta, Mill sólo nos nombra un único hecho que se supone que se afirma en la definición del número 3. Este hecho consiste, según él, en que existen configuraciones de objetos que, si bien impresionan los sentidos con la imagen $^{o}{}_{o}{}^{o}$, pueden ser descompuestas en dos partes, tal como sigue: oo o. ¡Qué bien, pues, que no todo en el mundo esté firmemente clavado, ya que entonces no podríamos llevar a cabo esta separación, y 2+1 no sería 3! ¡Qué pena que Mill no haya ilustrado también los hechos físicos que están a la base de los números 0 y 1!

Mill prosigue: «Admitido este enunciado, a todas las divisiones similares las llamamos 3.» De ahí se desprende que, en realidad, es incorrecto hablar de tres campanadas cuando en el reloj dan las tres, o decir que dulce, ácido y amargo son tres sensaciones del gusto; tampoco hay que admitir la expresión «tres modos de resolución de una ecuación»; pues en ninguno de estos casos se tiene una impresión sensible como la de $^{o}{}_{o}{}^{o}$.

Ahora bien, dice Mill: «Los cálculos no se siguen de la definición misma, sino de los hechos observados.» Pero, ¿en qué punto de la prueba antes expuesta del enunciado 2+2=4, habría tenido que apelar Leibniz al mencionado hecho? Mill se olvida de señalar la citada laguna, si bien da una prueba del enunciado «5+2=7» que se corresponde exactamente con la leibniziana.[9] La laguna realmente existente, que radica en la omisión de los paréntesis, la pasa por alto Mill, igual que Leibniz.

[7] *System of Logic*, Libro III, cap. XXIV, 5 (traducido al alemán por J. Schiel).
[8] *Op. cit.*, Libro II, cap. VI, 2.



Si la definición de cada uno de los números afirmase realmente un hecho físico particular, no se admirarían suficientemente los conocimientos de física de un hombre que calculase con números de nueve cifras. Con todo, quizá la concepción de Mill no llega tan lejos, hasta sostener que todos estos hechos deben ser observados cada uno en particular, sino que bastaría haber inferido, por inducción, una ley general, en la que estuvieran incluidos todos ellos. Pero trátese de expresar esta ley y se verá que es imposible. No es suficiente decir: hay grandes colecciones de cosas que pueden ser descompuestas; pues con ello no se ha dicho que existan colecciones exactamente tan grandes y exactamente del tipo que se exigen para la definición del número 1 000 000, por ejemplo, y tampoco se detalla el modo de descomposición. La concepción de Mill conduce necesariamente a la exigencia de que, para cada número, se observe especialmente un hecho, porque en una ley general se perdería justamente lo peculiar del número 1 000 000, que pertenece necesariamente a su definición. En efecto, según Mill, no debería ponerse 1 000 000= =999 999+1 si no se hubiese observado precisamente este modo peculiar de descomposición de una colección de cosas, que es distinto del que pueda corresponder a otro número cualquiera.

8. Parece que Mill opina que las definiciones 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1, etc., no debieran hacerse mientras no se hubiesen observado los hechos mencionados por él. Es verdad que no se debe definir 3 como (2+1), si previamente no se ha asociado a (2+1) algún sentido. Pero la cuestión es saber si para ello es necesario observar esa colección y su descomposición. El número 0 sería entonces enigmático; pues hasta ahora nadie ha visto o tocado 0 guijarros. Sin duda, Mill explicaría el 0 como algo sin sentido, como un mero modo de hablar; los cálculos con 0 serían un mero juego con signos va-

[9] *Op. cit.*, Libro III, cap. XXIV, 5.

cíos, y la única maravilla sería que de esto resultase algo razonable. Pero si estos cálculos tienen un significado en serio, el propio signo 0 no puede ser totalmente sin sentido. Y surge la posibilidad de que 2+1, de manera análoga al 0, pudiera tener algún sentido, incluso si no se observara el hecho mencionado por Mill. ¿Quién afirmaría realmente que se haya observado alguna vez el hecho que, según Mill, se halla contenido en la definición de un número de 18 cifras, y quién negará que, a pesar de esto, semejante signo numérico tiene un sentido?

Quizás se diga que los hechos físicos sólo se utilizarían para los números más pequeños, hasta 10 por ejemplo, mientras los restantes se compondrían a partir de éstos. Pero si se puede formar el 11 a partir del 10 y el 1 por simple definición, sin haber visto la colección correspondiente, no hay razón por la que no pueda formarse así también el 2 a partir del 1 y el 1. Si los cálculos con el número 11 no se siguen de un hecho característico de este número, ¿cómo es que los cálculos con el 2 tienen que basarse en la observación de cierta colección y de su descomposición peculiar?

Quizás se pregunte cómo llegaría a existir la aritmética, si no pudiéramos distinguir por los sentidos ninguna cosa o sólo tres. Para nuestro conocimiento de los enunciados aritméticos y de sus aplicaciones, un tal estado sería ciertamente algo precario, ¿pero lo sería también para su verdad? Si a un enunciado se le llama empírico, porque hayamos tenido que hacer observaciones para hacernos conscientes de su contenido, entonces es que no se emplea el término «empírico» en el sentido de opuesto a lo «a priori». Se expresa, entonces, una afirmación psicológica, que sólo atañe al contenido del enunciado; que éste sea verdadero o no, en tal caso no se toma en consideración. En este sentido, también son empíricos todos los cuentos de Münchhausen; pues sin duda hay que haber observado algunas cosas para poderlos inventar.

## ¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas?

9. La discusión llevada hasta aquí hace probable que las fórmulas numéricas sean deducibles solamente de las definiciones de cada uno de los números por medio de algunas leyes generales; y que estas definiciones ni afirman hechos observados, ni los presuponen para su legitimidad. Interesa, por tanto, averiguar la naturaleza de estas leyes.



Mill,[10] para su demostración antes mencionada de la fórmula «5+2=7», pretende emplear el enunciado: «lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de estas partes». Considera que ésta es una expresión que caracteriza el enunciado que usualmente aparece bajo la forma: «las sumas de iguales son iguales». Lo llama verdad inductiva y ley natural del máximo orden. Es típico de la inexactitud de su exposición que no introduzca este enunciado en el paso de la demostración, en el que, según su opinión, es indispensable; con todo, parece que su verdad inductiva debe reemplazar el axioma de Leibniz: «si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste». Pero para poder llamar a las verdades aritméticas leyes naturales, Mill les atribuye un sentido que no tienen. Dice, por ejemplo,[11] que la igualdad «1=1» podría ser falsa porque una pesada de una libra no tiene siempre exactamente el mismo peso que otra. Pero no es esto lo que afirma el enunciado «1=1».

Mill entiende el signo «+» de tal manera que, por medio de él, se expresen las relaciones de las partes de un cuerpo físico o de un montón respecto de la totalidad; pero no es éste el sentido del signo. «5+2=7» no significa que si se vierten sobre 5 volúmenes de un líquido 2 volúmenes del mismo, se obtienen 7 volúmenes de líquido, sino que esto es una aplicación del primer enunciado, aplicación que se cumple únicamente cuando no aparece una modificación del volumen a consecuencia de un fenómeno químico, por ejemplo. Mill confunde siempre las aplicaciones que se pueden hacer de un enunciado aritmético, las cuales, frecuentemente, son físicas y presuponen hechos observados con el enunciado puramente matemático mismo. El signo de la suma puede parecer, ciertamente, en algunas aplicaciones, que corresponde a la formación de un montón; pero no es ésta su referencia; pues en el caso de otras aplicaciones no puede ni hablarse de montones, agregados o de la relación de un cuerpo físico con sus partes; por ejemplo, cuando el cálculo se refiere a acontecimientos. Cierto que aquí también se puede hablar de partes, pero entonces se utiliza esta palabra, no en sentido físico o geométrico, sino en sentido lógico, como cuando se dice que los asesinatos de jefes de Estado son una parte de los asesinatos en general. Se trata aquí de la subordinación lógica. Y así también, la adición en general no corresponde a una

[10] *Op. cit.*, Libro III, cap. XXIV, 5.
[11] *Op. cit.*, Libro II, cap. VI, 3.

relación física. En consecuencia, las leyes generales de la adición tampoco pueden ser leyes naturales.

10. Pero quizá podrían ser todavía verdades inductivas. ¿Cómo sería esto? ¿De qué hechos hay que partir para elevarse a lo general? Estos hechos sólo pueden ser las fórmulas numéricas. Con ello volvemos a perder, naturalmente, la ventaja que habíamos ganado en las definiciones de cada uno de los números, y deberíamos empezar a buscar alguna otra vía de fundamentación de las fórmulas numéricas. Incluso si olvidamos este inconveniente, no fácilmente superable, seguiremos encontrando el terreno desfavorable para la inducción; en efecto, aquí nos falta la uniformidad que puede dar en otros campos una tan gran seguridad a este método. Ya Leibniz,[12] a la afirmación de Philatèthex de que:

«Los diversos modos del número no son aptos para otra diferenciación que la de más o menos; de ahí que sean modos simples como los del espacio»,

había respondido:

«Esto puede decirse del tiempo y de la línea recta, pero en ningún caso de las figuras y aún menos de los números, que no se diferencian meramente en su magnitud, sino que, además, son desemejantes. Un número par puede ser dividido en dos partes iguales, no, en cambio, un número impar; 3 y 6 son números triangulares, 4 y 9 son números cuadrados, 8 es un cubo, etc.; y esto ocurre en los números aún más que en las figuras; pues dos figuras distintas pueden ser totalmente semejantes entre sí, pero nunca lo podrán ser dos números.»

Nos hemos acostumbrado a considerar los números como homogéneos en muchas relaciones; pero esto sólo viene de que conocemos una serie de enunciados generales que valen para todos los números. Sin embargo, aquí debemos situarnos en el punto de vista de que todavía no conocemos ninguna de estas leyes. De hecho, sería difícil hallar un ejemplo de inferencia inductiva que correspondiese a nuestro caso. Por lo general, es frecuente que afirmemos el enunciado de que cualquier lugar en el espacio y cualquier instante en el tiempo son por sí mismos tan buenos como cualesquiera otros. Un efecto debe aparecer en otro lugar y en otro instante igual, siempre que las condiciones sean las mismas. Esto no ocurre aquí, puesto que los números son no espaciales y atemporales. Las posiciones de la serie numérica no son equivalentes como los lugares del espacio.

[12] BAUMANN: *Op. cit.*, vol. II, p. 39 (ed. de Erdmann, p. 243).



Los números se comportan también muy distintamente de los individuos de una especie animal, pongamos por caso, ya que, por su naturaleza misma, poseen una ordenación jerárquica definida: cada uno está formado de manera particular y tiene sus peculiaridades propias, que se ponen especialmente de manifiesto en el 0, el 1 y el 2. Siempre que un enunciado que se refiere a una especie se fundamenta por inducción, se suele tener ya toda una serie de propiedades comunes, a partir tan sólo de la definición del concepto de la especie. Pero, en el caso de los números, parece difícil encontrar una única propiedad que no tuviera que ser demostrada primero.

Lo más fácil sería quizá comparar nuestro caso con el siguiente. Supongamos que en un pozo se ha observado que la temperatura aumenta regularmente con la profundidad; supongamos también que hasta el momento se han encontrado capas muy distintas de materiales. Es evidente, entonces, que de sólo las observaciones que se han hecho en este pozo, no se puede inferir nada sobre la estructura de las capas más profundas y también tiene que posponerse la cuestión de si seguirá dándose la regularidad en la distribución de temperaturas. El concepto «por lo que se refiere a una perforación continuada» engloba, ciertamente, tanto lo observado hasta el momento como lo que se halla a mayor profundidad; pero este concepto es de poca utilidad aquí. Tampoco nos servirá, en el caso de los números, que todos ellos queden englobados por el concepto «lo que se obtiene con la adición continuada del uno». Puede encontrarse una diferencia entre ambos casos en el hecho de que a las capas se las descubre, mientras que los números son realmente creados por la adición continuada del uno, estando así su naturaleza completamente determinada. Ahora bien, esto sólo puede significar que, por el modo como ha surgido un número, por ejemplo, el 8, por adición de 1, se pueden deducir ya todas sus propiedades. Con ello se reconoce, en el fondo, que las propiedades de los números se siguen de sus definiciones, y se abre la posibilidad de demostrar las leyes generales de los números a partir del modo de generarse que les es común, mientras que, por otro lado, las propiedades particulares de cada uno de ellos se seguirían del modo particular con que han sido creados por adición continuada del uno. De este modo tam-

bién, en el caso de las capas geológicas, podría inferirse, sin que fuera necesaria la inducción, lo que está determinado tan sólo por la profundidad en la que se encuentran, o sea, sus relaciones de posición; pero lo que no esté determinado así, tampoco nos lo podrá enseñar la inducción.

Seguramente, el procedimiento mismo de la inducción sólo puede justificarse mediante leyes generales de la aritmética, si es que por inducción no se entiende un simple hábito. Este último no tendría, ciertamente, ninguna fuerza como garantía de verdad. Mientras el método científico, que procede según cánones objetivos, encuentra a veces gran probabilidad de certeza en una sola confirmación, y otras veces considera casi carentes de valor miles de casos, el hábito, en cambio, viene determinado por el número y la intensidad de las impresiones y circunstancias subjetivas, que no tienen ningún derecho a ejercer su influencia en el juicio. La inducción debe basarse en la teoría de la probabilidad, porque nunca puede hacer a un enunciado más que probable. No se ve, sin embargo, la manera cómo esta teoría podría desarrollarse sin presuponer leyes aritméticas.

11. Leibniz [13] cree, por el contrario, que verdades necesarias como las que se encuentran en la aritmética deben tener principios, cuya demostración no dependa de los ejemplos y, por tanto, tampoco del testimonio de los sentidos, aunque ciertamente sin los sentidos a nadie se le hubiera ocurrido pensar en ellos. «Toda la aritmética nos es innata y está en nosotros de modo virtual.» En qué sentido usa la expresión «innato», lo aclara en otro pasaje: [14] «No es cierto que todo lo que se aprende no es innato; las verdades de los números están en nosotros, y no por ello dejamos de aprenderlas, ya sea porque se las arranque de su origen, cuando son aprendidas por demostración (lo cual muestra precisamente que son innatas), ya sea...»

## ¿Son las leyes de la aritmética sintéticas a priori o analíticas?

12. Si se considera ahora la oposición entre analítico y sintético, resultan cuatro combinaciones, de las cuales, no obstante, una queda inmediatamente eliminada, a saber:

[13] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 13 y 14 (ed. de Erdmann: pp. 195, 208 y 209).
[14] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 38 (ed. de Erdmann, p. 212).



analítico a posteriori.

Si uno se ha decidido, como Mill, por lo a posteriori, no queda ninguna alternativa, de modo que a nosotros sólo nos quedan dos posibilidades a examinar:

sintético a priori

y

analítico.

Kant se decide por la primera. En este caso, sin duda, no es posible más que apelar a una intuición pura como fundamento último del conocimiento, si bien es difícil decir aquí si se trata de una intuición espacial o temporal, o de qué otro tipo puede ser. Baumann [15] coincide con Kant, si bien por razones algo distintas. También para Lipschitz [16] los enunciados que afirman que el número es independiente de la manera de contar y que se cumplen la conmutatividad y asociatividad de los sumandos provienen de la intuición interna. Hankel [17] basa la teoría de los números reales en tres principios fundamentales, a los que atribuye el carácter de *notiones communes*: «Se hacen completamente evidentes por simple exposición, valen para todo tipo de magnitudes una vez dada la intuición pura de magnitud y, sin menoscabo de su carácter esencial, pueden ser transformados en definiciones, diciendo: por adición de magnitudes se entiende una operación que satisface estos enunciados.» En la última afirmación se esconde un punto oscuro. Quizá se pueda hacer la definición; pero ésta no puede constituirse en sustitutivo exacto de los principios fundamentales, pues en el momento de aplicarlos, siempre surgiría la cuestión: ¿son los números magnitudes y es lo que suele denominarse adición de números, adición en el sentido de esta definición? Y para responder a esto, deberían conocerse ya los principios de los números. Por lo demás, la expresión «intuición pura de la magnitud» nos choca. Si se tiene en cuenta todo lo que se llaman magnitudes: números, longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, curva-

[15] *Op. cit.*, t. II, p. 669.
[16] *Lehrbuch der Analysis (Manual de Análisis)*, t. I, p. 1.
[17] *Theorie der complexen Zahlensysteme (Teoría de los sistemas de números complejos)*, pp. 54 y 55.

turas, masas, velocidades, fuerzas, intensidades de luz, corrientes galvánicas, etc., se puede comprender, ciertamente, cómo se puede subordinar todo esto a un *concepto* de magnitud; pero la expresión «intuición de la magnitud» y más aún, «intuición pura de la magnitud», no puede ser admitida como adecuada. No puedo admitir ni siquiera una intuición de 100 000, menos aún del número en general o de la magnitud en general. Es demasiado fácil apelar a la intuición interior, cuando no puede darse otro fundamento. Pero, con todo, no deberíamos perder totalmente de vista el sentido de la palabra «intuición».

Kant la define en la *Lógica* (ed. de Hartenstein, VIII, p. 88) con estas palabras:

«La intuición es una representación individual *(repraesentatio singularis)*, el concepto es una representación general *(repraesentatio per notas communes)* o reflejada *(repraesentatio discursiva)*.»

La relación con la sensibilidad no se expresa aquí en absoluto; en cambio, aparece incluida en la estética trascendental, y sin ella, la intuición no puede servir como principio de conocimiento para los juicios sintéticos a priori. En la *Crítica de la razón pura* (ed. de Hartenstein, III, p. 55) [18] se nos dice:

«Por medio de la sensibilidad, pues, nos vienen dados objetos, y ella sola nos proporciona intuiciones.»

El sentido de este término, por consiguiente, es distinto del que tiene en la estética trascendental. En el sentido lógico, se podría llamar quizás a 100 000 una intuición; pues no es un concepto general. Pero en este sentido, la intuición no puede servir como fundamentación de las leyes aritméticas.

13. En general, será bueno no sobrevalorar el parentesco de la aritmética con la geometría. En contra de esto, he citado ya un pasaje leibniziano. Un punto geométrico, considerado en sí mismo, no se puede distinguir de otro cualquiera; lo mismo vale para rectas y superficies. Únicamente cuando se aprehenden simultáneamente en una única intuición varios puntos, rectas o superficies se hacen distinciones entre ellos. Si en la geometría se pueden obtener leyes generales a partir de la intuición, ello se explica por el hecho de que los puntos, rectas o superficies intuidos no son, en realidad, particulares, y pueden servir, por tanto, como representantes de toda su especie. La cuestión es diferente en el caso de los

[18] Paginación en las ediciones originales: A19/B33. *(N. del T.)*



números: cada uno tiene su peculiaridad. No puede decirse de buenas a primeras hasta qué punto un número determinado puede representar a todos los demás sin explicar todas sus particularidades.

14. También la comparación de las clases de verdades con respecto al dominio ejercido por cada una de estas clases hace poco plausible la suposición de la naturaleza empírica y sintética de las leyes aritméticas.

Los enunciados empíricos son válidos para la realidad física o psicológica; las verdades geométricas rigen el dominio de lo espacialmente intuitivo, ya sea realidad o producto de la imaginación. Las más extravagantes de las fantasías febriles, las invenciones más atrevidas de leyendas y poetas, en las que los animales hablan, las estrellas se quedan quietas, las piedras se hacen hombres y los hombres árboles, en las que se nos enseña cómo uno puede salirse de un cenagal tirando de su propia peluca, siguen estando sujetas, en la medida en que son intuibles, a los axiomas de la geometría. Sólo el pensamiento conceptual puede liberarse, en cierto modo, de éstos, cuando acepta, por ejemplo, un espacio de cuatro dimensiones o una medida de curvatura positiva. Tales consideraciones no son inútiles en absoluto; pero se apartan totalmente del terreno de la intuición. Si en estos casos también se echa mano de ella, se trata, en cualquier caso, siempre de la intuición del espacio euclídeo, del único de cuya estructura tenemos una intuición. Pero ésta no se toma, entonces, por lo que es, sino como símbolo de algo distinto; se llama, por ejemplo, recta o plano lo que se intuye curvo. Para el pensamiento conceptual se puede aceptar siempre el opuesto de este o aquel axioma, sin que uno entre en contradicciones consigo mismo, cuando saca conclusiones de tales hipótesis contrarias a la intuición. Esta posibilidad muestra que los axiomas geométricos son independientes entre sí y de las leyes lógicas primitivas; o sea, que son sintéticos. ¿Puede decirse lo mismo de los principios fundamentales de la ciencia de los números? ¿No entra todo en confusión si se quiere negar uno de éstos? ¿Sería entonces posible aún el pensamiento? ¿No es más profundo el fundamento de la aritmética que el de todo saber empírico, más profundo incluso que el de la geometría? Las verdades aritméticas rigen el dominio de lo numerable. Éste lo abarca todo, pues no sólo le pertenece lo real, no sólo lo intuible, sino también todo lo pensable. ¿No deberían estar, pues, las leyes de los números en íntima conexión con las del pensamiento?

15. Que las aseveraciones de Leibniz sólo pueden interpretarse a favor de la naturaleza analítica de las leyes numéricas, se desprende de que para él lo a priori coincide con lo analítico. Así dice él [19] que el álgebra debe sus ventajas a un arte muy superior, a saber, la verdadera lógica. En otro lugar,[20] compara las verdaderas necesarias y las contingentes con las magnitudes conmensurables e inconmensurables, y sostiene que para las verdades necesarias es posible una prueba o una reducción a identidades. No obstante, estas manifestaciones pierden peso, porque Leibniz se inclina a considerar, en el caso de las verdades demostrables:[21] «... que cada verdad tiene su prueba a priori, sacada del concepto de los términos, si bien no siempre está en nuestro poder el llegar a este análisis». La comparación con la conmensurabilidad e inconmensurabilidad nos vuelve a proporcionar una barrera insuperable, por lo menos para nosotros, entre verdades casuales y necesarias.

Decididamente a favor de la naturaleza analítica de las leyes numéricas se pronuncia W. Stanley Jevons [22]: «El número es sólo una distinción lógica, y el álgebra es una lógica altamente desarrollada.»

16. Pero también esta opinión tiene sus dificultades. ¿Acaso debe estar enraizado este altísimo árbol, tan ramificado y siempre en crecimiento, que es la ciencia de los números, en meras identidades? ¿Y cómo llegan las formas vacías de la lógica a extraer de sí mismas un contenido tal?

Mill opina: «La doctrina de que por medio de la manipulación artificiosa del lenguaje podemos descubrir hechos y desvelar ocultos procesos naturales es tan contraria al sano sentido común, que se requiere ya haber hecho progresos en filosofía para poder creer en ella.»

Lo cual es cierto si uno no piensa en nada durante la manipulación artificiosa. Mill ataca aquí un formalismo que apenas es defendido por nadie. Todo aquel que emplea palabras o signos matemáticos pretende que éstos significan algo, y nadie puede esperar que de signos vacíos vaya a resultar alguna cosa con sentido. Pero es posible que un matemático lleve a cabo largos cálculos, sin referirse con sus signos a

[19] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 56 (ed. de Erdmann, p. 424).
[20] BAUMANN: *Op. cit.*, II, p. 57 (ed. de Erdmann, p. 83).
[21] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 57 (ed. de Pertz, t. II, p. 55).
[22] *The principles of science (Los principios de la ciencia)*, Londres, 1879, p. 156.



nada intuible o perceptible por los sentidos. Pero ello no basta para que estos signos carezcan de sentido; se puede distinguir todavía entre ellos mismos y su contenido, incluso si éste sólo es aprehensible mediante signos. Nos damos cuenta de que se habrían podido estipular otros signos para lo mismo. Basta con saber cómo hay que manejar lógicamente el contenido hecho sensible por medio de los signos, y, si se quieren hacer aplicaciones a la física, cómo hay que llevar a término el paso a los fenómenos. Pero en tales aplicaciones no hay que ver el sentido verdadero de los enunciados matemáticos. Con ellas se pierde siempre gran parte de la generalidad de éstos, y se introduce siempre algún elemento particular, que en otras aplicaciones será reemplazado por otra cosa.

17. Por mucho que se menosprecie la deducción, no se puede negar que las leyes fundadas en la inducción son insuficientes. De éstas últimas deben deducirse nuevos enunciados que no están contenidos en ninguna de ellas. Que éstos se hallen, en cierto modo, incluidos en todas ellas juntas, no nos exime de la tarea de extraerlos de ahí y establecerlos por sí mismos. Con ello se abre la siguiente posibilidad: en vez de hacer depender una deducción directamente de un hecho, se puede dejar éste tal como está y admitir su contenido como condición. Si en un razonamiento se sustituyen de este modo todos los hechos por condiciones, se obtendrá el resultado de manera que, de una serie de condiciones, se desprende una conclusión. Esta verdad estaría fundamentada únicamente en el pensamiento o, para decirlo como Mill, en el manejo artificioso del lenguaje. No es imposible que las leyes numéricas sean de este tipo. Serían entonces juicios analíticos, aunque no tendrían por qué ser descubiertas por el pensamiento solo, pues no se trata aquí de la manera de descubrirlas, sino del tipo de razones en que se basa la prueba; o, como dice Leibniz:[23] «No se trata aquí de la historia de nuestros descubrimientos, que es distinta en los distintos hombres, sino de la conexión y del orden natural de las verdades, que siempre es el mismo.» La observación entonces debería decidir, en último término, si se cumplen las condiciones contenidas en las leyes así fundamentadas. De este modo se llegaría finalmente allí donde también se habría llegado por medio de la dependencia inmediata de la deducción respecto de los hechos observados. Pero en muchos ca-

[23] *Nouveaux Essais*, IV, 9 (ed. de Erdmann, p. 360).

sos es preferible el tipo de procedimiento aquí indicado, porque éste conduce a un enunciado general, que no tiene por qué ser sólo aplicable exactamente a los hechos presentes. Las verdades de la aritmética serían entonces a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Cada una de ellas contendría concentrado en su interior todo un encadenamiento deductivo para usos futuros, y su utilidad consistiría en que ya no hubiera que hacer las deducciones por separado, sino que se podría expresar de golpe el resultado de toda la cadena.[24] Teniendo en cuenta el impresionante desarrollo de los estudios aritméticos y sus múltiples aplicaciones, ya no se podrá sostener, evidentemente, el menosprecio, tan ampliamente difundido, hacia los juicios analíticos y la leyenda de la esterilidad de la lógica pura.

Si esta idea, manifestada aquí no por primera vez, pudiera ser elaborada en detalle, de modo que no restara la menor duda, no sería éste, según creo, un resultado totalmente insignificante.

[24] Es notable que también MILL, *Op. cit.*, libro II, cap. VI, 4, parece sostener esta concepción. Su sensatez le permite superar de vez en cuando su prejuicio en favor de lo empírico. Pero este último hace entrar de nuevo todo en confusión, al hacerle confundir las aplicaciones físicas de la aritmética con esta misma. Parece no saber que su juicio hipotético también puede ser verdadero cuando no lo es la condición.

Capítulo segundo

# Opiniones de algunos autores sobre el concepto de número

18. Si nos volvemos ahora hacia los objetos primarios de la aritmética, debemos distinguir los números individuales 3, 4, etc., del concepto de número en general. Ahora bien, nosotros ya hemos decidido considerar que la mejor manera de deducir los números individuales es como lo hacen Leibniz, Mill, H. Grassmann y otros, a partir del uno y cada vez por adición del uno; pero también consideramos que estas definiciones seguirán siendo incompletas, hasta tanto el uno y la adición del uno no sean definidas. Hemos visto que se necesitan enunciados generales para deducir de estas definiciones las fórmulas numéricas. Tales leyes, precisamente debido a su generalidad, no pueden ser deducidas de las definiciones de cada uno de los números, sino sólo a partir del concepto general de número. Vamos a someter ahora este concepto a un examen más detenido. Es probable que con ello también tengamos que discutir el uno y la adición del uno, y, por lo tanto, podemos esperar también completar las definiciones de cada uno de los números.

19. Aquí quisiera oponerme, ante todo, al intento de concebir el número geométricamente, como proporción de longitudes o superficies. Se creía con ello, evidentemente, que se facilitarían las múltiples aplicaciones de la aritmética a la geometría, poniendo sus orígenes, inmediatamente, en íntima conexión.

Newton [1] propone entender por número no tanto un conjunto de unidades, como la relación abstracta de cada una de las magnitudes con otra de la misma clase, que se toma como unidad. Puede reconocerse que de este modo se describe adecuadamente el número en sentido amplio, al que pertenecen también las fracciones y los números irracionales; no obstante, en este caso se presuponen los conceptos de magnitud y de relación entre magnitudes. En consecuen-

[1] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, p. 475.

cia, parece que no es superflua una definición del número en sentido estricto, es decir, del número natural; pues Euclides emplea el concepto de equimultiplicidad para definir la igualdad de dos longitudes, y la equimultiplicidad nos hace retroceder de nuevo a una ecuación numérica. Pero puede ser que la igualdad de longitudes sea definible independientemente del concepto de número. Con todo, se seguiría desconociendo en qué relación está el número así definido geométricamente con el número de la vida cotidiana. Ésta quedaría entonces completamente separada de la ciencia. Y, no obstante, bien se puede exigir de la aritmética que nos ofrezca los puntos de conexión para toda aplicación del número, si bien la aplicación misma no es asunto suyo. Incluso el cálculo ordinario debe tener la fundamentación de su proceder en la ciencia. Y, además, se plantea la cuestión de si la aritmética misma puede bastarse con un concepto geométrico de número, por ejemplo, cuando se piensa en el número de raíces de una ecuación, o de los números que son primos con un número y menores que él, u otros casos parecidos. El número, en cambio, que responde a la pregunta ¿cuántos?, puede determinar también cuántas unidades están contenidas en una longitud. El cálculo con números negativos, fraccionarios, irracionales, puede reducirse al cálculo con los números naturales. Pero quizá lo que Newton entendía por magnitudes, mediante cuyas relaciones puede definirse el número, no son sólo las magnitudes geométricas, sino también conjuntos. Sin embargo, en tal caso la definición es inservible para nuestro propósito, porque de las expresiones «número por el que viene definido un conjunto» y «relación de un conjunto con la unidad de conjuntos», el último no nos proporciona mayor información que el primero.

20. La primera cuestión será, pues, la de si el número es definible. Hankel [2] opina que no es posible: «Lo que significa pensar o poner un objeto 1 vez, 2 veces, 3 veces... no puede definirse debido a la simplicidad, por principio, a partir del concepto de poner.»

De lo que se trata aquí, empero, no es tanto del poner, como del 1 vez, 2 veces, 3 veces. Si esto pudiera ser definido, la indefinibilidad del poner nos preocuparía poco. Leibniz se inclina por considerar el número, por lo menos aproximadamente, como idea adecuada, es decir, una idea tal, que es

[2] *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.



tan clara, que todo lo que se da en ella se hace a su vez claro.

Si, por lo general, hay mayor inclinación a tomar el número como indefinible, esto proviene más del fracaso de los intentos encaminados a dar una definición, que a razones en contra debidas a la naturaleza misma de la cuestión.

## ¿Es el número una propiedad de las cosas externas?

21. ¡Tratemos, por lo menos, de asignarle al número un lugar entre nuestros conceptos! En el lenguaje, los números aparecen generalmente en forma de adjetivos y en relación atributiva, análogamente a las palabras duro, difícil, rojo, que se refieren a propiedades de las cosas externas. Es natural preguntarse si los números individuales también deben concebirse así, y si, en consecuencia, el concepto de número en general puede compararse, digamos, con el de color.

Ésta parece ser la opinión de M. Cantor,[3] cuando dice que la matemática es una ciencia empírica, en el sentido de que tiene su origen en la consideración de objetos del mundo exterior. El número surge únicamente por abstracción de objetos.

Según E. Schröder,[4] el número está copiado de la realidad, es sacado de ella, por medio de la representación de las unidades mediante unos. A esto lo denomina él la abstracción del número. En esta representación, las unidades sólo se consideran en cuanto a su frecuencia, prescindiéndose de todas las demás cualificaciones de las cosas, como colores y formas. Frecuencia es aquí solamente otro nombre de número. Schröder pone, pues, la frecuencia o número al mismo nivel que el color y la forma, considerándola como una propiedad de las cosas.

22. Baumann [5] rechaza la idea de que los números son conceptos extraídos de las cosas externas: «Porque las cosas externas no nos presentan unidades rigurosas; se nos presentan en grupos delimitados o en puntos sensibles, pero tenemos la libertad de volver a tomarlos como multiplicidades.» De hecho, mientras por un simple cambio de concep-

[3] *Grundzüge einer Elementarmathematik (Caracteres esenciales de una matemática elemental)*, p. 2, 4. Análogamente, Lipschitz: *Lehrbuch der Analysis*, Bonn, 1877, p. 1.

[4] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig, 1873, pp. 6, 10 y 11.

[5] *Op. cit.*, t. II, p. 669.

ción no soy capaz de modificar en lo más mínimo el color de una cosa o su dureza, puedo considerar, en cambio, la *Ilíada* como *un* poema, como 24 cantos o como un gran número de versos. ¿Acaso no se habla en un sentido completamente distinto de las 1 000 hojas de un árbol y de las hojas verdes del mismo? El color verde lo atribuimos a cada hoja, no así el número 1 000. Podemos agrupar todas las hojas del árbol bajo el nombre de follaje. También éste es verde, pero no 1 000. ¿A quién, pues, le corresponde realmente la propiedad 1 000? Casi parece que no se trata ni de cada una de las hojas ni de su totalidad; quizá no corresponda en realidad a las cosas del mundo exterior. Si le doy a alguien una piedra, diciéndole: determina el peso de esto, con ello le he dado todo el objeto de investigación. Pero si le entrego un paquete de barajas con las palabras: determina el número de esto, él no sabrá si yo quiero saber el número de cartas, o de juegos completos o quizá las unidades de valor en el caso del tresillo. Por el simple hecho de entregarle el paquete, todavía no le he dado completamente el objeto de investigación; debo añadir una palabra: carta, juego, unidad de valor. Tampoco puede decirse que los diversos números se hallan yuxtapuestos como los diversos colores. Puedo señalar una superficie coloreada dada, sin decir una palabra, pero no así un número dado. Si de un objeto puedo decir, con igual derecho, que es verde y que es rojo, esto significa que este objeto no es el verdadero portador del color verde. Tal portador sólo puede ser una superficie que sea únicamente verde. Así también un objeto al que puedo adscribir diversos números con el mismo derecho, no puede ser el verdadero portador de un número.

Una diferencia esencial entre color y número consiste, por lo tanto, en que el color azul se atribuye a una superficie independientemente de nuestra voluntad. Es la capacidad de reflejar determinados rayos de luz y de absorber otros en mayor o menor medida. Y nuestro modo de consideración no puede modificar esto en lo más mínimo. En el caso del paquete de barajas, por el contrario, yo no puedo decir que le corresponda en sí mismo el número 1 ó 100 o cualquier otro, sino, a lo sumo, con respecto a nuestro modo arbitrario de consideración; e incluso así, no puedo asignarle el número simplemente como predicado. Preguntarse a qué queremos llamar un juego completo es evidentemente una estipulación arbitraria, y el paquete de barajas ni se entera. Pero al examinar el paquete desde este punto de vista, descubriremos quizá que podemos denominarlo dos juegos completos. Alguien que no supiera a qué se llama un juego completo hallaría probablemente cualquier otro número, en vez del dos, precisamente.



23. A la pregunta de a quién le corresponde el número como propiedad, contesta Mill [6] así:

«El nombre de un número denota una propiedad que pertenece al agregado de cosas que designamos con este nombre; y esta propiedad es el modo característico de estar constituido el agregado o de poder descomponerse en partes.»

Aquí, en primer lugar, el artículo determinado en la expresión «el modo característico» es un error, pues hay modos muy diversos de descomponer un agregado, y no puede decirse que sólo uno sea característico. Un haz de paja, por ejemplo, puede descomponerse de tal modo que se partan en dos todas las briznas, o de modo que se separen las briznas una a una, o de modo que se obtengan dos haces. ¿Y está un montón de cien granos de arena compuesto igual que un haz de 100 briznas de paja? No obstante, en ambos casos se tiene el mismo número. El numeral «uno», en la expresión «una brizna de paja», no expresa, sin embargo, la manera como esta brizna está compuesta de células o de moléculas. Más dificultades aún presenta el número 0. Por lo demás, ¿deben las briznas formar un haz para que puedan ser contadas? ¿Hay que concentrar en una reunión a todos los ciegos del Imperio alemán para que la expresión «número de ciegos en el Imperio alemán» tenga un sentido? ¿Acaso mil granos de trigo, después de haber sido sembrados, no son ya mil granos de trigo? ¿Hay realmente agregados de demostraciones de un teorema o de acontecimientos? Y, no obstante, éstos también se pueden contar. En este caso es indiferente que los acontecimientos sean simultáneos o estén separados por milenios.

24. Con ello llegamos a otra razón por la que no hay que equiparar el número con el color y la solidez: su aplicabilidad mucho mayor.

Mill [7] opina que la verdad de que todo lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de estas partes, es válida para todos los fenómenos naturales, porque todos pueden ser contados. ¿Pero acaso no se pueden contar mu-

[6] *Op. cit.*, Libro III, cap. XXIV, 5.
[7] *Op. cit.*, Libro III, cap. XXIV, 5.

chas más cosas? Locke [8] dice: «El número encuentra aplicación en hombres, ángeles, acciones, pensamientos, cualquier cosa que exista o que pueda ser imaginada.» Leibniz [9] rechaza la opinión de los escolásticos, según la cual el número es inaplicable a las cosas incorpóreas, y dice que el número es, en cierto modo, una figura incorpórea, surgida de la unión de cosas cualesquiera, por ejemplo, de Dios, un ángel, un hombre y el movimiento, que juntos son cuatro. De ahí que el número es, según él, algo totalmente universal, que pertenece a la metafísica. En otro lugar,[10] dice: «No puede ser pesado lo que no tiene fuerza ni potencia; lo que no tiene partes no tiene, en consecuencia, ninguna medida; pero no hay nada que no admita el número. Por esto es el número, en cierto modo, la figura metafísica.»

De hecho sería asombroso que una propiedad abstraída de cosas externas pudiera ser trasladada a sucesos, a imágenes, a conceptos, sin modificación de su sentido. Sería exactamente como si se quisiera hablar de un suceso fundible, de una imagen azul, de un concepto salado, de un juicio rígido.

Es disparatado que en lo no sensible aparezca lo que, por su naturaleza, es sensible. Cuando vemos una superficie azul, tenemos una impresión peculiar, a la que corresponde la palabra «azul», y esa impresión la reconocemos de nuevo cuando vemos otra superficie azul. Si quisiéramos suponer que, del mismo modo, al contemplar un triángulo, a la palabra «tres» le corresponde algo sensible, esto deberíamos reencontrarlo también en tres conceptos; algo no sensible contendría algo sensible. Puede admitirse, sin duda, que a la palabra «triangular» le corresponde cierta especie de impresiones sensibles, pero en tal caso hay que tomar dicha palabra como todo. El tres que hay en ella no lo vemos inmediatamente, sino que vemos algo con lo que puede relacionarse una actividad intelectual, la cual, a su vez, lleva a emitir un juicio en el que entra el número 3. ¿Cómo percibimos, por ejemplo, el número de figuras del silogismo que presenta Aristóteles? ¿Con los ojos quizá? Vemos a lo sumo ciertos signos para estas figuras, no las figuras mismas. ¿Cómo podemos ver su número, si ellas mismas son invisibles? Pero, quizá diga alguno, basta con ver los signos; su número es igual al número de las figuras del silogismo. Pero, entonces,

[8] Baumann: *Op cit.*, t. I, p. 409.
[9] *Idem*, t. II, p. 56.
[10] *Idem*, t. II, p. 2.



¿cómo se sabe esto? Para ello, tendremos que haber determinado por otro camino el último número. ¿O es el enunciado «el número de las figuras del silogismo es cuatro» solamente otra forma de expresar «el número de los signos de las figuras del silogismo es cuatro»? Evidentemente, no. De los signos no hay que decir nada; nadie quiere saber nada de los signos, a no ser que su propiedad exprese también alguna propiedad de lo designado por ellos. Dado que una misma cosa puede tener distintos signos, sin que por ello cometamos error lógico, no es preciso siquiera que el número de signos coincida con el número de lo designado.

25. Mientras que para Mill el número es algo físico, para Locke y Leibniz consiste únicamente en una idea. De hecho, como dice Mill,[11] dos manzanas son físicamente distintas de tres manzanas, y dos caballos de un caballo; son fenómenos visual y táctilmente distintos.[12] ¿Pero puede concluirse de aquí que la dualidad, la trinidad, son algo físico? *Un* par de botas puede ser el mismo fenómeno visible y tangible que *dos* botas. Tenemos aquí una diferencia numérica, a la que no corresponde ninguna diferencia física, pues *dos* y un *par* no son, en absoluto, lo mismo, como extrañamente parece creer Mill. En fin, ¿cómo es posible que dos conceptos se diferencien físicamente de tres conceptos?

Así, dice Berkeley:[13] «Es de notar que el número no es algo fijo y determinado que exista realmente en las cosas mismas. Es totalmente creación del espíritu, producida cuando éste considera una idea en sí misma o bien una combinación de ideas, a la que quiere dar un nombre, haciéndola pasar así por unidad. Según los variados modos en que el espíritu combina sus ideas, la unidad varía, y con la unidad también varía el número, que es sólo una colección de unidades. Decimos de una ventana que es una, de una chimenea que es una, y, con todo, una casa en la que haya muchas ventanas y muchas chimeneas es, con el mismo derecho, una, y muchas casas constituyen una ciudad.»

[11] *Op. cit.*, Libro III, cap. XXIV, 5.
[12] Estrictamente hablando, habría que añadir: hasta tanto sean fenómenos. Pero si alguien tiene un caballo en Alemania y otro en América (y ninguno más), entonces posee dos caballos. Pero éstos no constituyen un solo fenómeno, sino que solamente cada caballo por sí mismo podría ser llamado así.
[13] Baumann: *Op. cit.*, t. II, p. 428.

## ¿Es el número algo subjetivo?

26. Siguiendo este razonamiento, es fácil llegar a la conclusión de que el número es algo subjetivo. Parece como si el modo en que el número surge en nosotros, nos diera la clave de su esencia. Sería cuestión, entonces, de hacer una investigación psicológica. En este sentido, ciertamente, dice Lipschitz:[14]

«Quien quiera obtener una visión de conjunto de ciertas cosas, empezará con una cosa determinada e irá añadiendo siempre una nueva cosa a las anteriores.» Esto parece adecuarse mucho mejor al modo como obtenemos la visión de una constelación, que no a la formación de números. El propósito de obtener una visión de conjunto es inesencial; pues casi nadie diría que un rebaño se hace más visible en conjunto cuando se llega a saber de cuántas cabezas consta.

Una descripción semejante de los procesos internos que preceden a la emisión de un juicio sobre números, aunque sea adecuada, nunca podrá sustituir a una verdadera definición conceptual. Nunca podría ser empleada en la demostración de un enunciado aritmético; mediante ella no adquirimos conocimiento de ninguna propiedad de los números. Pues el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte. La objetividad del mar del Norte no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de toda la superficie de agua en la Tierra delimitemos y cubramos bajo el nombre de «mar del Norte». Esto no es motivo para querer estudiar este mar por vía psicológica. Así también el número es algo objetivo. Cuando se dice que «el mar del Norte tiene 10 000 millas cuadradas de extensión», no nos estamos refiriendo, ni con «mar del norte» ni con «10 000», a un estado o proceso en nuestro interior, sino que se afirma algo totalmente objetivo, que es independiente de nuestras imágenes o cosas parecidas. Si otra vez, pongamos por caso, modificásemos algo los límites del mar del Norte, o entendiésemos por «10 000» algo distinto, no sería ahora falso el contenido que antes era verdadero, sino que el contenido verdadero habría sido reemplazado quizá por uno falso, con lo cual no se habría suprimido en absoluto la verdad del primero.

El botánico quiere expresar algo igualmente factual cuando cuenta el número de pétalos de una flor, que cuando explica su color. Lo uno depende tan poco como lo otro de nuestro arbitrio. Existe, pues, una cierta analogía entre número y color, pero ésta no consiste en que ambos sean sensiblemente perceptibles en cosas externas, sino en que ambos son objetivos.

Distingo lo objetivo de lo que es palpable, espacial o real. El eje terrestre, el centro de masas del sistema solar, son objetivos, pero no quisiera llamarlos reales, como lo es la Tierra misma. Es frecuente llamar al Ecuador línea *imaginaria,* pero sería falso llamarlo línea *inventada;* no ha nacido en el pensamiento, no es el resultado de un proceso anímico, sino que sólo ha sido conocido, aprehendido por el pensamiento. Si el ser conocido fuera equivalente al surgir, no podríamos decir nada positivo sobre el Ecuador con respecto a una época que hubiese precedido a este supuesto surgimiento.

El espacio, según Kant, pertenece a la apariencia. Sería posible que otros seres racionales se lo representasen de manera completamente distinta a nosotros. Ni siquiera podemos saber si aparece a un hombre igual que a otro, pues no podemos colocar la intuición del espacio del uno al lado de la del otro para compararlas. Pero, con todo, hay algo objetivo contenido en esta intuición; todos admiten los mismos axiomas geométricos, aunque sólo sea en sus acciones, y deben admitirlos para poder orientarse en el mundo. Lo objetivo aquí es lo regular, conceptual, enjuiciable, lo que puede expresarse en palabras. Lo puramente intuitivo no es comunicable. Para aclarar esto, supongamos a dos seres racionales, a los cuales sólo resulten intuibles las propiedades y relaciones proyectivas: el estar tres puntos en una recta, cuatro puntos en un plano, etc.; para el uno podría aparecer como plano lo que el otro intuye como punto, y viceversa. Lo que para uno sería la línea de conexión entre dos puntos, sería para el otro la línea de intersección de dos planos, etc., siempre en correspondencia dual. Entonces, podrían entenderse muy bien entre sí y no se darían cuenta nunca de la diferencia de sus intuiciones, porque en la geometría proyectiva a cada teorema le corresponde otro, dualmente; pues el diferir en las apreciaciones estéticas no sería ningún signo seguro. Con respecto a todos los teoremas geométricos estarían en completo acuerdo, sólo que las palabras se traducirían distintamente en su

[14] *Lehrbuch der Analysis,* p. 1. Supongo que Lipschitz piensa en un proceso interno.

intuición. A la palabra «punto», el uno asociaría esta intuición, el otro la otra. A pesar de esto, se puede decir que esta palabra significa algo objetivo para ellos; sólo que no hay que entender por este significado lo particular de su intuición. Y en este sentido también el eje terrestre es objetivo.

Ante la palabra «blanco», se piensa habitualmente en una cierta sensación que, naturalmente, es del todo subjetiva; pero ya en el uso corriente del lenguaje me parece que muchas veces se pone de manifiesto un sentido objetivo. Cuando se dice que la nieve es blanca, se quiere expresar una característica objetiva, que a la luz corriente del día, reconocemos en una cierta sensación. Si se la ilumina con determinado color, lo tenemos en cuenta al hacer el juicio. Se dirá quizá: ahora *aparece* roja, pero *es* blanca. También el daltónico puede hablar de rojo y verde, si bien no distingue estos colores en la sensación. Reconoce la distinción en el hecho de que otros la hagan, o quizá por medio de un experimento físico. Así, pues, el término cromático frecuentemente no designa nuestra sensación subjetiva, de la que no podemos saber que concuerde con la de otro —pues evidentemente esto no queda garantizado porque la designación sea igual—, sino que designa una característica objetiva. Así entiendo por objetividad la independencia de nuestras sensaciones, intuiciones e imágenes, de la proyección de representaciones internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores, pero no la independencia de la razón; pues responder a la pregunta de qué son las cosas independientemente de la razón significaría juzgar sin juzgar, lavar la piel sin mojarla.

27. Por esto tampoco puedo estar de acuerdo con Schloemilch,[15] cuando dice que el número es la imagen del lugar de un objeto en una serie.[16] Si el número fuera una imagen,

[15] *Handbuch der algebraischen Analysis (Manual de análisis algebraico)*, p. 1.

[16] Contra esto también puede objetarse que, en tal caso, siempre que se diese el mismo número, debería aparecer la misma imagen de un lugar, lo cual es manifiestamente falso. Lo que sigue no haría al caso, si él entendiera por imagen una idea objetiva; ¿pero qué diferencia habría entonces entre la imagen del lugar y el lugar mismo?

La imagen en sentido subjetivo es aquello a que se refieren las leyes psicológicas de asociación; tiene un carácter sensible, representativo. La imagen en sentido objetivo pertenece a la lógica y es esencialmente no sensible, si bien el término que se refiere a una imagen objetiva frecuentemente connota también una imagen subjetiva, la cual, sin embargo, no es su referencia. La imagen subjetiva suele ser demostrablemente distinta en distintos hombres, mientras que la objetiva es la misma



la aritmética sería psicología. Y lo es tanto como la astronomía. Así como ésta no se ocupa de las imágenes de los planetas, sino de los planetas mismos, tampoco el objeto de la aritmética es una imagen. Si el dos fuera una imagen, ésta sería ante todo solamente mía. La imagen que tiene otro es ya, en cuanto tal, otra imagen. Entonces tendríamos quizá muchos millones de doses. Debería decirse: mi dos, tu dos, un dos, todos los doses. Si se aceptan imágenes latentes o inconscientes, se tendrían también doses inconscientes, que más tarde volverían a ser conscientes. Con los seres humanos en crecimiento, irían surgiendo nuevos doses, y quién sabe si, con el paso de los milenios se modificarían tanto que llegaría a ser $2 \times 2 = 5$. A pesar de todo esto, sería dudoso que hubiera infinitos números, como se cree generalmente. Quizá $10^{10}$ sería solo un signo vacío y no habría en ningún ser alguna imagen que pudiera designarse así.

Vemos a qué maravillas se llega cuando se concreta algo más la idea de que el número es una imagen. Y llegamos a la conclusión de que el número no es ni espacial ni físico, como los montones de guijarros o de nueces de Mill, ni tampoco es subjetivo, como las imágenes, sino no sensible y objetivo. El fundamento de su objetividad no puede radicar en las impresiones sensoriales, que, en cuanto afecciones de nuestra mente, son completamente subjetivas, sino que sólo puede radicar, hasta donde alcanzo a ver, en la razón.

Sería asombroso que la ciencia más exacta se basara en la psicología, que todavía anda a tientas, insegura.

## El número como conjunto

28. Algunos autores definen el número como un conjunto, una multiplicidad o pluralidad. El inconveniente radica aquí en que los números 0 y 1 quedan excluidos del concepto. Las expresiones anteriores son bastante vagas: tan pronto se acercan más al significado de «montón», «grupo», «agregado» —con lo cual se piensa en una yuxtaposición espacial—,

para todos. Las imágenes objetivas pueden dividirse en objetos y conceptos. Para evitar confusiones, usaré «imagen» sólo en sentido subjetivo. Debido a la asociación de ambos significados en esta misma palabra, dio Kant a su doctrina un matiz muy subjetivo, idealista, dificultando el hallazgo de sus verdaderas opiniones. La distinción hecha aquí está tan justificada como la distinción entre psicología y lógica. ¡Ojalá se deslindaran éstas siempre rigurosamente!

como se usan, otras veces, casi como equivalentes a «número», sólo que más vagamente. En una tal definición no puede encontrarse, por tanto, un análisis del concepto de número. Thomae [17] exige, para la construcción del número, que a diferentes conjuntos de objetos se les dé diferentes nombres. Con ello se refiere, evidentemente, a que hay que determinar con mayor precisión esos conjuntos de objetos, respecto de los cuales la denominación es solamente el signo externo. La cuestión es saber de qué tipo ha de ser esta determinación. Está claro que no surgiría la idea de número si se quisieran introducir nombres para «3 estrellas», «3 dedos», «7 estrellas», en los cuales no se puede ver ningún componente común. No se trata de dar nombres sin más, sino de que se designe por sí mismo lo que es el número en estas denominaciones. Para ello es necesario que reconozcamos a éste en su peculiaridad.

Además, hay que tener en cuenta el punto de discrepancia siguiente: algunos dicen que el número es un conjunto de cosas u objetos; otros lo definen, como ya hizo Euclides,[18] como un conjunto de unidades. Esta última expresión requiere una discusión especial.

[17] *Elementare Theorie der analytischen Functionen (Teoría elemental de las funciones analíticas)*, p. 1.

[18] *Elementos*, libro 7.°, al principio: Μονάς ἐστι, καθ'ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. («Unidad es aquello según lo cual, cada cosa que existe se dice que es una. Número es lo que está compuesto de una reunión de unidades».)

Capítulo tercero

# Opiniones sobre la unidad y el uno

## ¿Expresa el numeral «uno» una propiedad de objetos?

29. En las definiciones que Euclides da al principio del libro 7.° de los *Elementos*, tan pronto parece que con la palabra «μονας» se refiere a un objeto que hay que contar, como a una propiedad de un objeto tal, o bien al número uno. En todos los pasajes nos podemos contentar con la traducción «unidad», pero solamente porque esta palabra también está irisada con estas diferentes referencias.

Schröder [1] dice: «Cada una de las cosas que hay que contar se denomina unidad.» La pregunta es por qué se ponen las cosas primero bajo el concepto de unidad y no se define sencillamente: número es un conjunto de cosas, con lo cual volveríamos a lo que se ha dicho antes. Ante todo, el tomar las cosas como unidades puede verse como un intento de definición más precisa; si nos atenemos a la forma lingüística, «uno» puede considerarse un calificativo, y «una ciudad» se tomará como «hombre sabio». Entonces, una unidad sería un objeto al que se le atribuye la propiedad «uno», y sería a «uno» lo mismo que «un sabio» es al adjetivo «sabio». Pero a las razones que antes ya se han hecho prevalecer en contra de la idea de que el número es una propiedad de las cosas, se añaden aquí algunas más en particular. En primer lugar, sería sorprendente que cada cosa tuviese esta propiedad. Sería incomprensible el por qué se atribuye explícitamente esta propiedad a una cosa. Únicamente por la posibilidad de que algo no sea sabio, tiene sentido la afirmación de que Solón es sabio. El contenido de un concepto disminuye cuando aumenta su extensión; si ésta lo abarca todo, el contenido se habrá perdido totalmente. No es fácil imaginar cómo llegaría el lenguaje a crear un calificativo que no pudiera servir en absoluto para determinar con mayor precisión un objeto.

[1] *Op. cit.*, p. 5.

Si «un hombre» se debiera considerar análogamente a «hombre sabio», debería pensarse que «un» también puede utilizarse como predicado, de modo que si se dice «Solón era sabio», también podría decirse «Solón era un» o «Solón era uno». Si bien es cierto que la última expresión puede aparecer, no obstante, por sí sola no es comprensible. Puede significar, por ejemplo: Solón era un sabio, si «sabio» puede sobreentenderse por el contexto. Pero, aislado, «un» no parece poder ser predicado.[2] Más claramente aún se ve esto en el plural. Mientras que «Solón era sabio» y «Tales era sabio» pueden reunirse en «Solón y Tales eran sabios», no puede decirse, en cambio, «Solón y Tales eran un». No se podría comprender la imposibilidad de esto, si «un» fuera, igual que «sabio», una propiedad tanto de Solón como de Tales.

30. Con ello está relacionado el hecho de que no ha podido darse definición alguna de la propiedad «un». Cuando Leibniz[3] dice: «Uno es lo que reunimos por medio de un acto del entendimiento», está definiendo «uno» por medio de sí mismo. ¿Y no podemos reunir también muchos por medio de un acto del entendimiento? Esto lo admite Leibniz en el mismo pasaje. Análogamente, dice Baumann:[4] «Uno es lo que concebimos como uno» y prosigue: «Lo que ponemos como punto, o lo que ya no queremos dividir más, esto lo consideramos como uno; pero cada uno de la intuición externa, tanto de la pura como de la empírica, podemos considerarlo también como muchos. Toda imagen es una, en cuanto está delimitada frente a otra imagen; pero en sí misma puede ser diferenciada de nuevo en muchas.» De este modo desaparece cualquier delimitación concreta del concepto y todo pasa a depender de nuestra concepción. Volvemos a preguntar: ¿Qué sentido puede tener atribuir a un objeto cualquiera la propiedad «un», si, según la concepción que tomemos, todo puede ser uno y también no serlo? ¿Cómo puede basarse en un concepto tan confuso una ciencia que busca su gloria precisamente en la máxima determinación y exactitud?

31. Si bien Baumann[5] basa el concepto del uno en la in-

[2] Se emplean giros que parecen contradecir esto; pero ante un examen más detenido, se hallará que hay que completarlos con un término conceptual o que «uno» no se usa como numeral, es decir, que con él no se afirma la unicidad, sino la unificación.

[3] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 2 (ed. de Erdmann, p. 8).

[4] *Op. cit.*, t. II, p. 669.

[5] *Op. cit.*, t. II, p. 669.



tuición interna, con todo, en el pasaje que acabamos de citar, menciona como características suyas la indivisión y la delimitación. Si éstas le correspondieran, cabría esperar que también los animales tuvieran cierta imagen de la unidad. ¿Puede un perro, al contemplar la luna, tener una imagen, por vaga que sea, de lo que nosotros designamos con la palabra «un»? ¡Difícilmente! Y, sin embargo, distingue ciertamente objetos singulares: otro perro, su amo, una piedra con la que juega se le aparecen, sin duda, tan delimitados, tan consistentes por sí mismos, tan indivisos, como lo son para nosotros. Es verdad que notará una diferencia entre tener que defenderse contra muchos perros o bien sólo contra uno, pero esto es lo que Mill llama diferencia física. De lo que se trataría aquí es de si puede tener conciencia, por oscura que sea, de lo que es común a lo que expresamos con la palabra «un»; por ejemplo, en los casos en que es mordido por *un* perro mayor que él y en que persigue *un* gato. Esto me parece improbable. De ahí deduzco que la idea de la unidad no le es proporcionada al entendimiento, como opina Locke,[6] por el objeto exterior y la idea interior, sino que la conocemos por nuestras fuerzas intelectuales superiores, que nos diferencian de los animales. Por consiguiente, tales propiedades de las cosas como indivisión y delimitación, que son observadas por los animales igual que por nosotros, no pueden ser lo esencial en nuestro concepto.

32. Con todo, puede suponerse que tienen cierta conexión con éste. A ello alude el lenguaje al derivar «unido» de «uno». Es tanto más adecuado considerar algo como un objeto particular, cuanto menos relevancia tienen las diferencias dentro del objeto respecto de las diferencias entre el objeto y su entorno, cuanto mayor es su conexión interna respecto de su conexión con el entorno. Así, «unido» se refiere a una propiedad que nos impulsa a concebir algo separado del entorno y a examinarlo por sí mismo. Si el término francés «*uni*» significa «llano», «liso», esto puede explicarse por lo anterior. También la palabra «unidad» se utiliza de manera análoga, cuando se habla de la unidad política de un país o de la unidad de una obra de arte.[7] Pero, en este sentido, «unidad» corresponde menos a «un» que a «unido» o «unificado». Pues cuando

[6] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, p. 409.

[7] Sobre la historia del término unidad, véase Eucken: *Geschichte der philosophischen Terminologie (Historia de la terminología filosófica)*, pp. 122-123, p. 136, p. 220.

se dice que la Tierra tiene *una* luna, no se quiere decir con ello que se trata de una luna delimitada, consistente por sí misma, indivisa, sino que se dice como contraposición a lo que ocurre en Venus, Marte o Júpiter. Con respecto a delimitación e indivisión, las lunas de Júpiter podrían, sin duda, compararse con la nuestra, y en este sentido serían asimismo unitarias.

33. Algunos autores exigen, no sólo la indivisión, sino más aún, la indivisibilidad. G. Köpp [8] denomina individuo a toda cosa percibible, sensorialmente o no, que se piense como indescomponible y consistente por sí misma, y a los individuos que hay que contar los llama unos, siendo aquí «uno» empleado evidentemente en el sentido de «unidad». Al justificar Baumann su opinión de que las cosas exteriores no representan unidades rigurosas por el hecho de que tenemos la libertad de considerarlas como multiplicidades, abandona también la indescomponibilidad como característica de la unidad en sentido estricto. Al elevar la cohesión interna a la categoría de lo incondicionado, es evidente que se pretende obtener una característica de la unidad que sea independiente de puntos de vista arbitrarios. Este intento fracasa porque entonces no quedaría casi nada que pudiera ser llamado unidad y que pudiera ser contado. Por esto se da en seguida un paso atrás y no se propone como característica la indescomponibilidad misma, sino al ser pensado como indescomponible. Con ello se llega de nuevo a la anterior concepción vacilante. ¿Y se gana realmente algo con pensar las cosas de manera distinta a como son? ¡Todo lo contrario! De una hipótesis falsa pueden seguirse consecuencias falsas. Pero si no se quiere inferir nada de la indescomponibilidad, entonces, ¿de qué sirve? Si se puede, e incluso se debe, abandonar algo del rigor del concepto sin perjuicio, entonces, ¿para qué tanto rigor? O quizás lo que hay que hacer es no pensar en la descomponibilidad. ¡Como si con una carencia de pensamiento pretendiera conseguirse algo! Pero hay casos en los que no se puede evitar el pensar en la descomponibilidad, en los que una conclusión se basa en la composición de la unidad; por ejemplo, en el problema: un día tiene 24 horas, ¿cuántas horas tienen tres días?

[8] *Schularithmetik (Aritmética escolar)*. Eisenach, 1847, pp. 5 y 6.



**¿Son las unidades iguales entre sí?**

34. Así, pues, fracasa todo intento de definir la propiedad «un», y tenemos que renunciar a ver la designación de las cosas como unidades una determinación más precisa. Volvemos a nuestra cuestión: ¿por qué se llama a las cosas unidades, si «unidad» es sólo otro nombre para cosa, si todas las cosas son unidades o pueden ser concebidas como tales? E. Schröder [9] da como razón el que atribuyamos igualdad a los objetos que contamos. Ante todo, no se ve por qué las palabras «cosa» y «objeto» no pueden indicar esto igualmente bien. En segundo lugar, nos preguntamos: ¿por qué atribuimos igualdad a los objetos que contamos? ¿Se les atribuye tan sólo, o son realmente iguales? En todo caso, dos objetos no son *nunca* completamente iguales. Por otra parte, es cierto que casi siempre podemos descubrir algún aspecto en el que dos objetos coinciden. De este modo, hemos llegado de nuevo a la concepción arbitraria, si no queremos atribuir a las cosas, en contra de la verdad, más igualdad de la que les corresponde. De hecho, muchos autores califican a las unidades de iguales sin limitaciones. Hobbes [10] dice: «El número, en sentido absoluto, presupone en la matemática unidades iguales entre sí, de las cuales se forma el primero.» Hume [11] considera que las partes componentes de la cantidad y del número son totalmente homogéneas. Thomae [12] llama unidad a un individuo del conjunto y dice: «Las unidades son iguales entre sí.» Con el mismo derecho, o quizás más, podría decirse: los individuos del conjunto son distintos entre sí. Ahora bien, ¿qué significa para el número esta supuesta igualdad? Las propiedades por las que se diferencian las cosas son algo indiferente y ajeno a su número. De ahí que se las quiera mantener alejadas. Pero esto no se consigue de este modo. Si, como exige Thomae, «se hace abstracción de las peculiaridades de los individuos» o «en la consideración de cosas separadas, se prescinde de los caracteres por los que las cosas se diferencian», entonces no queda, como cree Lipschitz, «el concepto del número de las cosas consideradas», sino que se obtiene un concepto general, bajo el cual caen estas cosas. En este

[9] *Op. cit.*, p. 5.
[10] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, p. 242.
[11] *Idem*, t. II, p. 568.
[12] *Op. cit.*, p. 1.

proceso, las cosas mismas no pierden ninguna de sus peculiaridades. Si yo, por ejemplo, al considerar un gato blanco y uno negro, prescindo de las propiedades por las que ellos se distinguen, obtengo quizás el concepto «gato». Si ahora los pongo a ambos bajo este concepto y los llamo unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro sigue siendo negro. Incluso si no pienso en sus colores, o me propongo no sacar conclusiones de su diferenciación, no por ello se volverán los gatos sin color; permanecerán tan distintos como eran. El concepto «gato», que se ha obtenido de este modo por abstracción, ya no contiene, es verdad, las peculiaridades, pero precisamente por esto es sólo uno.

35. Por procedimientos meramente conceptuales no se consigue hacer iguales cosas distintas; pero si se consiguiese, ya no se tendrían cosas, sino sólo *una* cosa; pues, como dice Descartes,[13] el número —o mejor: la pluralidad— surge en las cosas por su diferenciación. E. Schröder[14] afirma con razón: «La exigencia de contar cosas sólo puede ser razonable cuando se hallan presentes objetos tales, que son claramente distinguibles entre sí, que están separados, por ejemplo, espacial o temporalmente, y que aparecen delimitados unos de otros.» De hecho ocurre a veces que una semejanza demasiado grande, por ejemplo, la de las barras de una reja, dificulta el contar. Con especial énfasis se manifiesta W. Stanley Jevons,[15] en este sentido: «Número es sólo otro nombre de diversidad. Identidad exacta es unidad, y con la diversidad surge la pluralidad.» Y prosigue (página 157): «Se ha dicho frecuentemente que las unidades son unidades en la medida en que se parecen totalmente entre sí; pero si bien en algunos aspectos pueden ser totalmente semejantes, deben ser diferentes por lo menos en un punto; de lo contrario, no podrían formar una pluralidad. Si tres monedas fueran tan semejantes que ocupasen el mismo lugar en el mismo instante, no serían tres monedas, sino una.»

36. Sin embargo, pronto aparece claro que esta idea de la diversidad de las unidades choca con nuevas dificultades. Jevons define: «Una unidad *(unit)* es un objeto cualquiera del pensamiento que puede discriminarse de cualquier otro objeto, que sea tomado como unidad en el mismo problema.» Aquí se define la unidad por sí misma y el añadido «que puede

[13] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, p. 103.
[14] *Op. cit.*, p. 3.
[15] *The principles of Science*, 3.ª ed., p. 156.



discriminarse de cualquier otro objeto» no contiene una determinación más precisa, porque es evidente. Precisamente llamamos al objeto otro sólo porque lo podemos discriminar del primero. Jevons[16] dice además: «Cuando escribo el símbolo 5, en realidad quiero decir

$$1+1+1+1+1$$

y está perfectamente claro que cualquiera de estas unidades es distinta de cualquier otra. Si fuera preciso, podría designarlas así:

$$1'+1''+1'''+1''''+1'''''.»$$

Sin duda, es preciso que sean designadas distintamente, si son distintas; de lo contrario, surgiría la máxima confusión. Si ya sólo el lugar diferente en que aparece el uno debiera significar una diferencia, esto debería ponerse como regla sin excepción, porque, en otro caso, no se sabría si $1+1$ se refiere a 2 ó a 1. Entonces debería abandonarse la ecuación $1=1$, y caeríamos en la perplejidad de no poder designar la misma cosa por segunda vez. Evidentemente, esto no interesa. Pero si a cosas diversas se les quiere dar signos diversos, no se comprende por qué se retiene todavía en éstos a un componente común, y en vez de

$$1'+1''+1'''+1''''+1'''''$$

no se prefiere escribir

$$a+b+c+d+e.$$

Pero de esta manera hemos vuelto a perder la igualdad, y la indicación de una cierta semejanza no sirve para nada. Así se nos deshace el uno en las manos; conservamos los objetos con todas sus peculiaridades. Los signos

$$1', 1'', 1'''$$

son una magnífica expresión de nuestra perplejidad: necesitamos la igualdad; por esto, el 1; necesitamos la diversidad; por

[16] *Op. cit.*, p. 162.

esto, los índices, que, por desgracia, no hacen más que eliminar de nuevo la igualdad.

37. Chocamos en otros autores con la misma dificultad. Locke [17] dice: «Repitiendo la idea de una unidad y añadiendo la misma a otra unidad, construimos una idea colectiva, que se designa con la palabra "dos". Y quien puede hacer esto y proseguir de esta manera, añadiendo siempre uno a la última idea colectiva que él tenía de un número, y dándole un nombre, éste sabe contar.» Leibniz [18] define el número como 1 y 1 y 1 o como unidades. Hesse [19] dice: «Si podemos hacernos una imagen de la unidad, que en el álgebra viene expresada con el signo 1,... también podemos pensar una segunda unidad, igualmente justificada, y otras del mismo tipo. La reunión de la segunda con la primera, formando un todo, da el número 2.»

Hay que tener en cuenta aquí la relación en la que están entre sí los significados de las palabras «unidad» y «uno». Leibniz entiende por unidad un concepto, bajo el cual caen el uno y el uno y el uno; o como también dice: «Lo abstracto del uno es la unidad.» Locke y Hesse parecen utilizar unidad y uno con el mismo significado. En el fondo, esto también lo hace Leibniz; pues al llamar «uno» a cada uno de los objetos que caen bajo el concepto de unidad, no designa con esta palabra el objeto individual, sino el concepto bajo el cual todos ellos caen.

38. Para no dejar que la confusión arraigue, será bueno, no obstante, mantener rigurosamente una diferencia entre unidad y uno. Decimos «el número uno», y con el artículo determinado indicamos un objeto determinado, único, de la investigación científica. No hay diversos números uno, sino sólo uno. En 1 tenemos un nombre propio, que, en cuanto tal, no admite el plural, como tampoco lo admiten «Federico el Grande» o «el elemento químico oro». No es casualidad ni es una notación inexacta el que se escriba 1 sin marcas diferenciadoras. La igualdad

$$3-2=1$$

la escribiría St. Jevons así quizás:

$$(1'+1''+1''')-(1''+1''')=1'.$$

[17] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, pp. 409-4.011.
[18] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 3.
[19] *Vier Species (Cuatro especies)*, p. 2.



Pero, ¿cuál sería el resultado de

$$(1'+1''+1''')-(1''''+1''''')?$$

En cualquier caso, no sería 1′. De esto se desprende que, según su concepción, no sólo habría diversos unos, sino también diversos doses, etc.; pues $1''+1'''$ no podría ser reemplazado por $1''''+1'''''$. Aquí se ve muy claramente que el número no es un amontonamiento de cosas. La aritmética desaparecería si, en vez del uno, que siempre es el mismo, se quisieran introducir cosas distintas, por mucho que sus signos fueran semejantes; para no cometer error, los signos no podrían ser iguales. Pero no se puede admitir que la necesidad más profunda de la aritmética esté basada en una notación errónea. Por esto es imposible considerar 1 como signo de diversos objetos, como puedan ser Islandia, Aldebarán, Solón, y otros. El absurdo es bien patente si imaginamos el caso de una ecuación que tenga tres raíces, pongamos 2, 5 y 4. Si, siguiendo a Jevons, escribimos por 3:

$$1'+1''+1''',$$

entonces 1′ se referiría aquí a 2, 1″ a 5 y 1‴ a 4, pues 1′, 1″ y 1‴ serían unidades y, por consiguiente, según Jevons, serían los objetos del pensamiento aquí presentes. ¿No sería entonces más comprensible escribir, en vez de $1'+''+1'''$,

$$2+3+4?$$

El plural es posible solamente para términos conceptuales. Así, pues, si se habla de «unidades», no se puede utilizar esta palabra como equivalente al nombre propio «uno», sino sólo como término conceptual. Si «unidad» significa «objeto a ser contado», no se puede definir el número a partir de las unidades. Si por «unidad» se entiende un concepto que comprende el uno y sólo el uno, el plural no tiene entonces ningún sentido, y nuevamente es imposible definir, como hace Leibniz, el número a partir de las unidades o de 1 y 1 y 1. Si el «y» se emplea aquí como en «Bunsen y Kirchhoff», en tal caso, 1 y 1 y 1 no es 3, sino 1, del mismo modo que oro y oro y oro nunca es otra cosa que oro. El signo «más» en

$$1+1+1=3$$

debe ser concebido, pues, distintamente al «y», el cual sirve para designar una reunión, una «idea colectiva».

39. Nos enfrentamos, por consiguiente, con la siguiente dificultad:

Si queremos producir el número como reunión de diversos objetos, obtendremos un amontonamiento que contiene los objetos precisamente con aquellas propiedades que los hacen distintos entre sí, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos constituir el número como reunión de lo igual, el resultado acaba por ser siempre el uno, y nunca alcanzamos una pluralidad.

Si con 1 queremos designar cada uno de los objetos que hay que contar, esto es un error, porque lo diverso recibe el mismo signo. Pero si proveemos al 1 de marcas diferenciadoras, este 1 se hace inservible para la aritmética.

La palabra «unidad» se adapta maravillosamente para ocultar esta dificultad; y éste es el motivo —si bien inconsciente— por el que se la prefiere a las palabras «objeto» y «cosa». Se empieza por llamar unidades a las cosas que hay que contar, con lo que la diversidad mantiene sus derechos; luego viene la reunión, agrupación, unión, anexión o como quiera llamarse, pasándose al concepto de la adición aritmética, y el término conceptual «unidad» se transforma, sin que lo advirtamos, en el nombre propio «uno». Con esto se consigue la igualdad. Si a la letra *u* añado una *n* y a ambas una *d*, cualquiera ve fácilmente que esto no es el número 3. Pero si pongo *u*, *n* y *d* bajo el concepto de «unidad», y en vez de «*u* y *n* y *d*» digo «una unidad y una unidad y otra unidad más» o «1 y 1 y 1», entonces es fácil creer que se ha obtenido el 3. La dificultad se halla tan bien oculta por la palabra «unidad», que ciertamente sólo pocos hombres tienen idea de que existe.

Aquí podría reprochar Mill, con razón, una manipulación artificiosa del lenguaje; pues no se trata de la manifestación externa de un proceso intelectual, sino que es sólo su apariencia. En este caso, se tiene la impresión de que a las palabras desprovistas de pensamiento, se les atribuye cierta fuerza misteriosa, por la cual lo diverso deviene igual, tan sólo llamándolo unidad.

## Intentos de superar la dificultad

40. Consideramos ahora algunas interpretaciones, que representan intentos de superar esta dificultad, si bien no siempre han sido hechas con clara conciencia de lograr este propósito.



En primer lugar, se puede buscar ayuda en alguna propiedad del espacio y del tiempo. No se puede distinguir, ciertamente, un punto espacial de otro, una recta o un plano de otra u otro, ni cuerpos, superficies o segmentos de líneas entre sí; sólo se pueden distinguir en cuanto compresentes como elementos de una intuición total. Por ello parece que aquí se unan igualdad y diferenciabilidad. Lo mismo vale para el tiempo. De ahí que Hobbes [20] opine que apenas puede imaginarse que la igualdad de las unidades surja de manera distinta a la división del continuo. Thomae [21] dice: «Si nos imaginamos un conjunto de individuos o unidades en el espacio y se las cuenta sucesivamente, para lo cual es preciso el tiempo, entonces, después de toda abstracción, sigue dándose como característica diferenciadora de las unidades, su distinta posición en el espacio y su distinto orden de sucesión en el tiempo.»

La primera objeción que se presenta frente a tal concepción es que, entonces, sólo podría contarse lo que está limitado al espacio y al tiempo. Ya Leibniz [22] refutaba la opinión de los escolásticos de que el número surge por mera división del continuo y de que no puede aplicarse a cosas incorpóreas. Baumann [23] subraya la independencia del número respecto al tiempo. St. Jevons [24] dice: «Tres monedas son tres monedas, tanto si las contamos una después de otra, como si las consideramos simultáneamente. En muchos casos, no es ni el tiempo ni el espacio el fundamento de la diferencia, sino únicamente la cualidad. Podemos discriminar, por ejemplo, el peso, la inercia y la dureza del oro como tres cualidades, si bien ninguna de ellas existe antes que la otra, ni en el espacio ni en el tiempo. Cualquier medio de discriminación puede ser un origen de pluralidad.» Yo añadiría: si los objetos contados no se siguen realmente unos a otros, sino que únicamente se cuentan uno después de otro, el tiempo no puede ser el fundamento de su diferenciación. Pues para poderlos contar uno después de otro, debemos poseer ya características diferenciadoras. El tiempo es solamente una necesidad psicológica para poder contar, pero no tiene nada que ver con el

[20] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, p. 242.
[21] *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 1.
[22] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 2.
[23] *Op. cit.*, t. II, p. 668.
[24] *The Principles of Science*, p. 157.

concepto de número. Si se utilizan puntos espaciales o temporales para representar objetos no espaciales o atemporales, esto puede ser quizás ventajoso para el proceso de contar; pero, en lo fundamental, en ello se presupone la aplicabilidad del concepto de número a lo no espacial y también a lo atemporal.

41. ¿Pero se ha alcanzado realmente el objetivo de la unión de diferenciabilidad e igualdad, cuando prescindimos de todas las características diferenciadoras, aparte de las espaciales y temporales? ¡No! No hemos dado ni un paso más hacia la solución. La mayor o menor similitud de los objetos no tiene ninguna relevancia para la cuestión si, en último término, hay que seguir manteniéndolos separados. No puedo designar con 1 cada uno de los puntos, líneas, etc., del mismo modo que tampoco puedo llamarlos a todos *A* por consideraciones geométricas; porque tanto en un caso como en otro, es necesario distinguirlos. Sólo por sí mismos, sin considerar sus relaciones espaciales, son iguales los puntos espaciales. Pero si quiero reunirlos conceptualmente, debo considerarlos en su compresencia espacial; de lo contrario, se fusionarán irremisiblemente en uno. Puntos tomados en su totalidad representarán quizás cierta figura del tipo de una constelación o estarán ordenados de alguna manera en una recta; segmentos iguales pueden tocarse en sus puntos terminales, formando un único segmento, o bien hallarse separados el uno del otro. Las configuraciones así surgidas pueden ser totalmente distintas para el mismo número. De este modo tendríamos también distintos cincos, seises, etc. Los instantes estarán separados por intervalos temporales breves o largos, iguales o desiguales. Todo esto son estructuras que no tienen nada que ver con el número en sí. Por todas partes se inmiscuye algo particular, de lo cual el número en su generalidad, queda muy distante. Incluso un momento singular tiene algo peculiar, por lo cual se diferencia de un punto espacial, por ejemplo, y de lo cual no aparece traza en el concepto de número.

42. Tampoco conduce al objetivo la solución de sustituir la ordenación espacial y temporal por un concepto de serie más general; pues el lugar ocupado en la serie no puede ser fundamento de la diferenciación de los objetos, ya que éstos deben haber sido diferenciados previamente de alguna manera para poder ser ordenados en una serie. Una ordenación tal presupone siempre ciertas relaciones entre los objetos, tanto si son espaciales como temporales, o bien lógicas, o intervalos de tono, o lo que sea, por medio de las cuales se puede pasar de un objeto a otro, estando necesariamente ligadas a la distinción de los objetos.



Cuando Hankel[25] habla de pensar o poner un objeto 1 vez, 2 veces, 3 veces, parece ser esto también un intento de unir la diferenciabilidad con la igualdad de lo que hay que contar. Pero también se ve inmediatamente que es un intento fracasado; pues estas imágenes o intuiciones del mismo objeto, para no confluir en una sola, tienen que ser distintas en algún sentido. También creo que está justificado hablar de 45 millones de alemanes, sin haber pensado o puesto previamente 45 millones de veces a un alemán medio, lo que resultaría un tanto complicado.

43. Probablemente para evitar las dificultades que se producen cuando, como St. Jevons, referimos cada signo 1 a uno de los objetos contados, E. Schröder pretende que con el signo 1 sólo representamos a un objeto. La consecuencia es que así sólo se define el signo numérico, no el número. En efecto, él dice:[26] «Para obtener un signo que sea capaz de expresar *cuántas* de esas unidades[27] se hallan presentes, dirigimos nuestra atención *una vez* sucesivamente a cada una de las mismas y la representamos por un trazo: 1 (un *uno*); estos unos se colocan en una línea, cada uno al lado de otro, pero se unen entre sí mediante el signo + (más), pues, de lo contrario, 111, por ejemplo, se leería ciento once, según la notación numérica usual. De este modo se obtiene un signo como el siguiente:

$$1+1+1+1+1,$$

cuya composición puede describirse diciendo:

«*Un número natural es una suma de unos.*»

De ahí se desprende que, para Schröder, el número es un *signo*. Lo que se expresa mediante este signo, lo que yo hasta aquí he llamado número, él lo presupone, con las palabras «cuántas de esas unidades se hallan presentes», como ya conocido. También con la palabra «uno» entiende él el signo 1, no su significado. El signo + sólo le sirve, de momento, como medio visible de unión, sin contenido propio; únicamente más

[25] *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.
[26] *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, pp. 5 ss.
[27] Objetos a ser contados.

tarde se define la adición. Habría podido decir, mucho más brevemente: escribimos tantos signos 1, uno al lado de otro, como objetos a contar se tengan, y los unimos mediante el signo +. El cero se expresaría no escribiendo nada.

44. Para no tener que recoger en el número las características diferenciadoras de las cosas, dice St. Jevons:[28]

«No habrá gran dificultad ahora en formar una noción clara de la naturaleza de la abstracción numérica. Ésta consiste en abstraer el carácter de la diferencia que origina la pluralidad, reteniendo solamente el hecho. Cuando hablo de *tres hombres*, no es necesario que especifique cada vez los rasgos por los que se puede distinguir a cada uno de ellos. Estos rasgos deben existir si se trata realmente de tres hombres y no de uno y el mismo, y al hablar de ellos en plural, implico la existencia de las diferencias requeridas. El número abstracto, entonces, es *la forma vacía de la diferencia.*»

¿Cómo hay que entender esto? O bien se pueden abstraer las propiedades diferenciadoras de las cosas antes de haber sido unidas en un todo, o bien se puede formar primero un todo y abstraer luego el tipo de diferencias. Por el primer camino no llegaríamos a la diferenciación de las cosas, ni tampoco podríamos fijar, por tanto, la presencia de diferencias; parece que Jevons se refiere al segundo camino. Pero no creo que así pudiéramos obtener el número 10 000, porque no estamos en situación de concebir simultáneamente tantas diferencias y fijar su presencia; ya que contándolas una después de otra, el número nunca llegaría a ser completo. Es verdad que contamos en el tiempo; pero con ello no obtenemos el número, sino que sólo lo determinamos. Por lo demás, indicar el modo de abstraer no es una definición.

¿Cómo hay que imaginar la «forma vacía de la diferencia»? ¿Acaso con un enunciado del tipo

«*a* es distinto de *b*»,

en que *a* y *b* se dejan indeterminados? ¿Sería este enunciado quizás el número 2? ¿Tiene el enunciado

«la Tierra posee dos polos»

[28] *Op. cit.*, p. 158.



el mismo significado que

«el Polo Norte es distinto del Polo Sur»?

Evidentemente, no. El segundo enunciado podría admitirse sin el primero y el primero sin el segundo. Para el número 1 000 tendríamos entonces

$$\frac{1\,000 \times 999}{1 \times 2}$$

enunciados semejantes que expresen una distinción.

Lo que Jevons dice no es en absoluto adecuado, en especial, para el 0 y el 1. ¿Qué es lo que en realidad hay que abstraer para pasar de la Luna al número 1? Por medio de la abstracción se obtienen ciertamente los conceptos: satélite de la Tierra, satélite de un planeta, cuerpo celeste sin luz propia, cuerpo, objeto; pero en esta serie no damos con el 1; pues no es un concepto bajo el que pudiera caer la Luna. En el caso del 0, ni siquiera se tiene un objeto del que poder partir para la abstracción. ¡Que no se objete que el 0 y el 1 no son números en el mismo sentido que 2 y 3! El número responde a la pregunta ¿cuántos?, y si se pregunta, por ejemplo: ¿cuántas lunas tiene este planeta?, uno puede estar preparado igualmente para la respuesta 0 ó 1, como para 2 ó 3, sin que por ello el sentido de la pregunta se vuelva distinto. Cierto que el número 0 tiene algo de particular, y lo mismo el 1, pero esto vale en lo fundamental, para cualquier número entero; sólo que en los números mayores esto se hace cada vez menos patente. Es completamente arbitrario establecer aquí una diferencia específica. Lo que no sea adecuado para el 0 o el 1 no puede ser esencial para el concepto de número.

Finalmente, con la suposición de que el número surge de esta manera, no se ha superado en absoluto la dificultad con que habíamos chocado al examinar la designación

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

para el 5. Esta notación concuerda bien con lo que Jevons dice sobre la abstracción creadora de números; los trazos superiores indican que allí hay una diferencia, aunque sin precisar de qué naturaleza. Pero la mera persistencia de la diferencia es suficiente ya, como hemos visto, para producir, siguiendo

la concepción de Jevons, diversos unos, doses, treses, lo cual es totalmente incompatible con la existencia de la Aritmética.

## Solución de la dificultad

45. Echemos una mirada retrospectiva a lo que hemos establecido hasta aquí y a las preguntas que aún siguen sin respuesta.

El número no se abstrae de las cosas de la misma manera que el color, el peso o la dureza; no es una propiedad de las cosas en el mismo sentido en que éstos lo son. Seguía en pie la pregunta: ¿de quién decimos algo cuando damos un número?

El número no es nada físico, pero tampoco es subjetivo, no es una imagen.

El número no surge añadiendo una cosa a otra cosa. También es irrelevante para él que demos una denominación a cada nuevo añadido.

Las expresiones «multiplicidad», «conjunto», «pluralidad» son, por su vaguedad, inadecuadas para definir el número.

Con respecto al uno y la unidad seguía en pie la pregunta de cómo puede limitarse la arbitrariedad de la concepción que parecía borrar toda diferencia entre uno y muchos.

La delimitación, la indivisión, la indescomponibilidad no son caracteres útiles para lo que expresamos con la palabra «uno».

Si a las cosas que hay que contar se las llama unidades, entonces la afirmación incondicionada de que las unidades son iguales es falsa. Que sean iguales en algún sentido, es ciertamente correcto, pero no tiene importancia. Es incluso necesaria la diferenciación de las cosas que hay que contar, si el número tiene que ser mayor que 1.

Parecería, pues, que debiéramos atribuir a las unidades dos propiedades contradictorias: la igualdad y la diferenciabilidad.

Hay que hacer una distinción entre uno y unidad. El término «uno», como nombre propio de un objeto de la investigación matemática, no admite plural. Carece, por tanto, de sentido hacer surgir los números por reunión de unos. El signo más, en $1+1=2$, no puede referirse a semejante unión.

46. Para clarificar un poco la cuestión será bueno considerar el número en el contexto de un juicio, donde aparece su modo de aplicación originario. Cuando frente al mismo fenómeno exterior puedo decir, con igual verdad: «esto es un grupo de árboles» y «esto son cinco árboles», o bien «aquí hay cuatro compañías» y «aquí hay 500 hombres», en tal caso, no se modifica ni lo individual ni la totalidad, el agregado, sino sólo mi denominación. Pero esto sólo es síntoma de que se ha reemplazado un concepto por otro. Con ello se nos sugiere, como respuesta a la primera pregunta del parágrafo anterior, que al asignar un número se afirma algo sobre un concepto. Cuando digo: «Venus tiene 0 lunas», no es que haya allí ninguna luna o agregado de lunas del que pudiera afirmarse algo; pero al *concepto* «luna de Venus» se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo él. Si digo: «del coche del Kaiser tiran cuatro caballos», atribuyo el número cuatro al concepto «caballo que tira del coche del Kaiser».



Puede quizás objetarse que un concepto como, por ejemplo, «habitantes del Imperio alemán», a pesar de que sus características no se modifican, tendría una propiedad cambiante de año en año, si es que el asignarle un número afirmase una propiedad de él. Contra esto puede argüirse que también hay objetos que cambian sus propiedades, sin que ello sea obstáculo para reconocerlos como los mismos. En este caso, empero, podemos dar la razón con mayor exactitud. El concepto «habitante del Imperio alemán» contiene el tiempo como elemento variable, o, para expresarme matemáticamente, es una función del tiempo. En vez de «*a* es un habitante del Imperio alemán», puede decirse: «*a* habita el Imperio alemán», y esto se refiere exactamente al instante presente. Así pues, ya el mismo concepto contiene algo fluctuante. Por el contrario, al concepto «habitante del Imperio alemán al principio del año 1883, hora de Berlín», le corresponde, por toda la eternidad, el mismo número.

47. Que dar un número expresa algo factual, independiente de nuestro punto de vista, solamente puede sorprender a aquellos que toman el concepto por algo subjetivo, igual que la imagen o representación. Pero esta opinión es falsa. Si subordinamos, por ejemplo, el concepto de cuerpo al de peso, o el de ballena al de mamífero, afirmamos con ello algo objetivo. Ahora bien, si los conceptos fuesen subjetivos, también sería algo subjetivo la subordinación de los unos a los otros, en cuanto relación entre ellos, como es subjetiva una relación entre imágenes. Claro que, a primera vista, el enunciado

«todas las ballenas son mamíferos»

parece tratar de animales, no de conceptos; pero cuando se pregunta de qué animal se está hablando, no se puede señalar a ninguno en concreto. Suponiendo que tuviéramos ante nosotros a una ballena, nuestro enunciado no afirma nada de ésta. De este enunciado no se podría deducir que el animal ante nosotros es un mamífero, sin añadir el enunciado de que este animal es una ballena, el cual no está contenido en el primer enunciado. En general, es imposible hablar de un objeto sin designarlo o denominarlo de alguna manera. Pero la palabra «ballena» no denomina a ningún ser individual. Si se replica que, en todo caso, no se trata de un objeto individual, determinado, pero sí de un objeto indeterminado, yo sostengo que «objeto indeterminado» es sólo otra expresión de «concepto», y una expresión ciertamente desafortunada, contradictoria. Por mucho que nuestro enunciado sólo pueda ser justificado por la observación de animales individuales, esto no prueba nada sobre su contenido. Para decidir de qué trata, es indiferente saber si es verdadero o no, o por qué razones lo consideramos verdadero. Entonces, si el concepto es algo objetivo, una afirmación sobre él también puede contener algo factual.

48. La apariencia, surgida en algunos ejemplos anteriores, de que a la misma cosa pueden corresponderle diversos números, se explica por el hecho de que en ellos se tomaban objetos como soportes del número. Tan pronto como instalamos en sus derechos el verdadero soporte, el concepto, los números se muestran tan exclusivos entre sí como lo son los colores en su campo.

También vemos cómo se llega a la idea de querer obtener el número por abstracción de las cosas. Lo que se obtiene así es el concepto, en el cual se descubre el número. Por esto es frecuente que la abstracción preceda de hecho a la formación de un juicio numérico. La confusión es la misma que si se quisiera decir: el concepto de peligro de incendio se obtiene construyendo una vivienda de entramados, con paredes de madera, un techo de paja y una chimenea de paredes finas.

La capacidad de reunir que posee el concepto sobrepasa en mucho la que tiene la apercepción sintética para unir. Con esta última no sería posible juntar a los habitantes del Imperio alemán en un todo; pero, en cambio, se les puede subordinar al concepto «habitante del Imperio alemán» y contarlos.

Ahora también se hace explicable el enorme campo de aplicación del número. Y de hecho resultaría problemático que



pudiese afirmarse lo mismo de fenómenos externos e internos, de lo espacial y de lo temporal, de lo no espacial y de lo atemporal. Ahora bien, todo esto no lo incluimos cuando asignamos un número. Los números sólo se asignan a los conceptos, bajo los cuales caen lo externo y lo interno, lo espacial y lo temporal, lo no espacial y lo atemporal.

49. Encontramos una confirmación de nuestra idea en Espinoza, quien dice:[29] «Respondo que una cosa es denominada una o única meramente respecto a su existencia, pero no respecto a su esencia; pues sólo nos representamos las cosas bajo el concepto de número después de haber sido puesta bajo una medida común. Quien, por ejemplo, tenga en la mano un sestercio y un imperial, no pensará en el número dos, a menos que pueda cubrir este sestercio y este imperial con uno y el mismo nombre, a saber, pieza o moneda: entonces podrá afirmar que tiene dos piezas o monedas; porque designa con el nombre de moneda no sólo el sestercio, sino también el imperial.» Pero, cuando prosigue: «De donde resulta claramente que de una cosa se dice que es una o única sólo después de habernos imaginado otra cosa que (como se ha dicho) coincide con la primera.» Y cuando sostiene que, en sentido propio, no puede decirse que Dios sea uno o único, porque no nos podemos formar ningún concepto abstracto de su esencia, se equivoca al suponer que el concepto sólo puede obtenerse por abstracción de varios objetos. Por el contrario, se puede llegar también al concepto partiendo de sus características; y, en tal caso, es posible que ninguna cosa caiga bajo este concepto. Si esto no ocurriera nunca, la existencia no se podría negar nunca, y con ello también perdería su contenido la afirmación de la existencia.

50. E. Schröder[30] subraya que si se ha de poder hablar de la frecuencia de una cosa, el nombre de esta cosa ha de ser siempre un *nombre genérico*, un término conceptual general *(notio communis)*: «Pues tan pronto como un objeto se toma completamente en consideración —con todas sus propiedades y relaciones— se presentará como único en el mundo y ya no habrá nada igual a él. El nombre del objeto recibirá entonces el carácter de *nombre propio (nomen proprium)* y el objeto no podrá pensarse como un objeto que se da repetidas veces. Pero esto no es válido tan sólo para objetos *concretos*; es válido en general para cualquier cosa, por mucho que su

[29] BAUMANN: *Op. cit.*, t. I, p. 169.
[30] *Op. cit.*, p. 6.

representación aparezca por abstracción; sólo se requiere que esta representación incluya los elementos que basten para hacer de la cosa en cuestión un objeto totalmente determinado... Lo último (ser objeto de enumeración) es posible para una cosa únicamente cuando se prescinde o *abstrae* de algunas de las características y relaciones peculiares, por las que se distingue de todas las demás cosas; sólo entonces el nombre de la cosa es un concepto aplicable a múltiples cosas.»

51. Lo que hay de cierto en esta exposición está encubierto por expresiones tan equívocas y engañadoras, que es preciso desenmarañarla e iluminarla. Ante todo, es inadecuado llamar a un término conceptual general, nombre de una cosa. Así surge la apariencia de que el número es una propiedad de una cosa. Un término conceptual general designa precisamente un concepto. Únicamente con el artículo determinado o con un pronombre demostrativo puede tomarse como nombre propio de una cosa, pero entonces deja de ser término conceptual. El nombre de una cosa es un nombre propio. Un objeto no se da repetidas veces, sino que son varios objetos los que caen bajo un concepto. Que un concepto no se obtiene únicamente por abstracción de las cosas que caen bajo él, se ha hecho observar ya al criticar a Espinoza. Aquí añado que un concepto no deja de ser concepto por el hecho de que bajo él sólo caiga una cosa, la cual estará, por consiguiente, totalmente determinada por él. A un concepto de este tipo (por ejemplo, satélite de la Tierra) corresponde justamente el número 1, que es número en el mismo sentido en que lo son 2 y 3. Dado un concepto, la cuestión siempre es saber si algo cae bajo él y qué es ello. Para un nombre propio, estas cuestiones carecen de sentido. No hay que dejarse engañar por el hecho de que el lenguaje utilice un nombre propio, por ejemplo, luna, como término conceptual y viceversa; la diferencia sigue existiendo a pesar de ello. Tan pronto como un término se emplea con el artículo indeterminado o en plural sin artículo, se trata de un término conceptual.

52. Una confirmación más de la idea, según la cual el número se atribuye a conceptos, puede hallarse en el uso del lenguaje alemán, en el que se dice «*zehn Mann*», «*vier Mark*», «*drei Fass*».[31] El singular puede indicar aquí que nos estamos refiriendo al concepto, no a la cosa. La ventaja de este modo de expresión se pone de relieve especialmente en el caso del número 0. En los demás casos, naturalmente, el lenguaje atribuye número a los objetos, no al concepto: se dice «número de balas», lo mismo que se dice «peso de las balas».[32] Así aparentemente, se habla de objetos, mientras que, en realidad, se quiere afirmar algo de un concepto. Este uso lingüístico es confusionario. La expresión «cuatro nobles caballos» produce la impresión de que «cuatro» determina con mayor precisión el concepto «noble caballo», lo mismo que «noble» determina con mayor precisión el concepto «caballo». No obstante, solamente «noble» es una característica semejante; con el término «cuatro» afirmamos algo de un concepto.

53. Por propiedades que se afirman de un concepto, no entiendo, naturalmente, las características que componen el concepto. Estas son propiedades de las cosas que caen bajo el concepto, no del concepto mismo. Así, por ejemplo, «rectángulo» no es una propiedad del concepto «triángulo rectángulo»; pero el enunciado de que no existe ningún triángulo rectángulo, rectilíneo y equilátero, afirma una propiedad del concepto «triángulo rectángulo, rectilíneo y equilátero»; a éste se le atribuye el número cero.

En este sentido, la existencia es análoga al número. La afirmación de la existencia, no es, en efecto, sino la negación del número cero. Porque la existencia es una propiedad del concepto, la prueba ontológica de la existencia de Dios no alcanza su objetivo. Pero igual que la existencia, tampoco la unicidad[33] es una característica del concepto de «Dios». La unicidad no puede utilizarse para la definición de este concepto, del mismo modo que la solidez, la comodidad y la habitabilidad de una casa no pueden utilizarse en su construcción, junto con piedras, argamasa y vigas. No obstante, de lo dicho no debe sacarse la conclusión general de que si algo es propiedad de un concepto, no puede deducirse del concepto, es decir, de sus características. En ciertas circunstancias, esto es posible, al igual que a partir del tipo de ladrillos a veces puede sacar-

[31] Es decir, «tres *hombre*», «cuatro *marco*», «tres *barril*», o sea, con el sustantivo en singular. Esto es frecuente, en alemán, en expresiones numéricas de términos colectivos muy usados en ciertos dominios de la vida cotidiana: por ejemplo, en el Ejército, en los precios, en el transporte, como corresponde a estos ejemplos. *(N. del T.)*

[32] En alemán, en la primera expresión, «balas» debe ir acompañado del artículo determinado, lo mismo que en la segunda. Nótese que, en cambio, en castellano, la primera vez «balas» aparece sin artículo determinado, lo cual apoyaría, en el lenguaje cotidiano, la afirmación de Frege de que cuando no hay artículo determinado, tenemos un concepto. En «peso de *las* balas», en cambio, se trata del peso de objetos. *(N. del T.)*

[33] La «Unidad» divina en la terminología teológica. *(N. del T.)*

se una conclusión sobre la durabilidad de un edificio. Por esto se afirmaría demasiado si dijéramos que de las características de un concepto nunca puede deducirse su unicidad o existencia; sólo que esto no puede hacerse nunca tan inmediatamente como cuando la característica de un concepto se atribuye como propiedad a uno de los objetos que caen bajo aquél.

También sería falso negar que existencia y unicidad puedan ser alguna vez características de conceptos. No son características de aquellos conceptos a los que serían adscritas siguiendo el uso del lenguaje. Pero si, por ejemplo, se reúnen bajo un concepto todos los conceptos, bajo los que sólo cae *un* objeto, entonces la unicidad es una característica de este concepto. Bajo este concepto caería, por ejemplo, el concepto «luna de la Tierra», pero no el cuerpo celeste que lleva este nombre. De este modo, se puede hacer caer un concepto bajo otro superior, bajo un concepto, por así decir, de segundo orden. No hay que confundir esta relación, sin embargo, con la de subordinación.

54. Ahora será posible definir satisfactoriamente la unidad. E. Schröder dice en la página 7 del manual a que nos hemos referido: «Ese nombre genérico o concepto será llamado la denominación del número formado del modo indicado y constituye la esencia de su unidad.»

De hecho, ¿no sería lo más adecuado llamar unidad a un concepto con respecto al número que le corresponde? Podemos obtener entonces un sentido para las afirmaciones sobre la unidad, según las cuales ésta se halla delimitada del entorno y es indivisible. Pues el concepto, al que se le asigna el número, delimita en general, de determinada manera, lo que cae bajo él. El concepto «letras de la palabra dos», delimita la *d* frente a la *o*, y a esta frente a la *s*. El concepto «sílabas de la palabra dos» saca la palabra como un todo, que es indivisible, en el sentido de que las partes ya no caen bajo el concepto «sílabas de la palabra dos». No todos los conceptos están constituidos así. Podemos, por ejemplo, descomponer lo que cae bajo el concepto de lo rojo de diversas maneras, sin que las partes dejen de caer bajo este concepto. A semejante concepto no le corresponde ningún número finito. El enunciado de la delimitación e indivisibilidad de la unidad, por consiguiente, puede expresarse así:

Unidad con relación a un número finito solamente la puede constituir un concepto tal que delimite claramente lo que cae bajo él y que no admita ninguna división arbitraria.



Se ve, empero, que «indivisibilidad» tiene aquí un significado especial.

Ahora podemos responder fácilmente a la pregunta de cómo puede reconciliarse la igualdad con la indivisibilidad de las unidades. La palabra «unidad» se emplea aquí en un doble sentido. Iguales lo son las unidades en el sentido antes explicado de la palabra. En el enunciado: «Júpiter tiene cuatro lunas», la unidad es «luna de Júpiter». Bajo este concepto caen tanto I como II, como III, como IV. De ahí que pueda decirse: la unidad a la que se refiere I es igual a la unidad a la que se refiere II y así sucesivamente. Con esto tenemos la igualdad. Pero si se afirma que las unidades son distinguibles, se entenderá por ella la capacidad de distinción de las cosas contadas.

Capítulo cuarto

# El concepto de número

## Cada número es un objeto independiente [1]

55. Después de haber visto que una asignación de número contiene una afirmación sobre un concepto, podemos tratar de completar las definiciones leibnizianas de cada uno de los números con las definiciones del 0 y del 1.

Parece natural definir: a un concepto le corresponde el número 0 cuando ningún objeto cae bajo él. Pero aquí parece que el 0 ha sido reemplazado por «ningún», que tiene el mismo significado; por esto es preferible la siguiente formulación: a un concepto le corresponde el número 0 cuando, sea lo que sea *a*, vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo este concepto.

De manera similar podría decirse: a un concepto *F* le corresponde el número 1, cuando, sea lo que sea *a*, no vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo *F*, y cuando de los enunciados

«*a* cae bajo *F*» y «*b* cae bajo *F*»

se sigue con toda generalidad que *a* y *b* son el mismo.

Sólo falta aún definir el paso de un número al siguiente. Intentamos la siguiente formulación: al concepto *F* le corresponde el número (n+1) cuando existe un objeto *a* que cae bajo *F* y tal que al concepto «que cae bajo *F*, pero no *a*», le corresponde el número *n*.

56. Estas definiciones surgen de una forma tan natural después de nuestros resultados anteriores, que es precisa una discusión especial de por qué no nos bastan.

[1] Utilizaremos los términos «objeto independiente» y «autónomo» indistintamente, como traducción equivalente del alemán «*selbständig*», que reúne ambos matices; es decir, se trata de un objeto que existe o subsiste por sí mismo, independientemente de otros objetos, un objeto que es «autosuficiente». *(N. del T.)*

Los inconvenientes provendrán ante todo de la última definición; pues, tomado estrictamente, el sentido de la expresión «al concepto *G* le corresponde el número *n*» nos es tan desconocido como el de la expresión «al concepto *F* le corresponde el número (n+1)». Cierto que por medio de esta última definición y de la penúltima podemos decir lo que significa

«al concepto *F* le corresponde el número 1+1»,

y luego, utilizando esto, podemos indicar el sentido de la expresión

«al concepto *F* le corresponde el número 1+1+1»,

etc.; pero, mediante nuestras definiciones, nunca podremos decidir —para dar un ejemplo burdo— si a un concepto le corresponde el número *Julio César*, ni si este famoso conquistador de las Galias es un número o no. Además, con el auxilio de nuestros intentos de definición, no podemos demostrar que debe ser $a=b$, cuando al concepto *F* le corresponde el número *a* y cuando al mismo le corresponde el número *b*. La expresión «*el* número que corresponde al concepto *F*» no podría justificarse, por tanto, y así sería en general imposible probar una igualdad numérica, porque nunca podríamos concebir un número determinado. Hemos definido el 0 y el 1 sólo aparentemente; en realidad, sólo hemos fijado el sentido de las frases

«el número 0 corresponde a»,
«el número 1 corresponde a»;

pero de ahí no resulta que esté permitido distinguir el 0 y el 1 como objetos independientes, reconocibles siempre que se quiera.

57. Éste es el lugar en que conviene examinar más de cerca nuestra expresión de que una asignación de número contiene una afirmación sobre un concepto. En el enunciado «al concepto *F* le corresponde el número 0», 0 es únicamente una parte del predicado, si consideramos el concepto *F* como sujeto real. Por esto he evitado llamar a un número como 0, 1, 2, *propiedad* de un concepto. Cada uno de los números aparece como objeto autónomo, precisamente porque constituye únicamente una parte de la afirmación. Más arriba ya he hecho notar que se dice «el 1», con lo cual, por medio del artículo determinado, 1 es caracterizado de objeto. Esta autonomía aparece, en la aritmética, por todas partes, por ejemplo, en la igualdad 1+1=2. Dado que aquí nos interesa constituir el concepto de número de modo que sea útil para la ciencia, no debe embarazarnos el hecho de que en el uso cotidiano del lenguaje, el número aparezca también con un carácter atributivo. Esto siempre puede evitarse. Por ejemplo, el enunciado «Júpiter tiene cuatro lunas» se puede transformar en «el número de lunas de Júpiter es cuatro». Aquí el «es» no debe considerarse como mera cópula, como en el enunciado «el cielo es azul». Esto se ve claro por el hecho de que se puede decir: «el número de lunas de Júpiter es el cuatro» o «es el número 4». En este caso, «es» tiene el sentido de «es igual», «es lo mismo que». Tenemos, pues, una ecuación que afirma que la expresión «el número de lunas de Júpiter» designa el mismo objeto que la palabra «cuatro». Y la forma de la ecuación es la forma que domina en la aritmética. Esta concepción no queda contradicha por el hecho de que la palabra «cuatro» no contenga nada sobre Júpiter o sobre lunas. Tampoco en el nombre «Colón» aparece nada sobre descubrimientos o sobre América, y, no obstante, al mismo hombre se le llama Colón y el descubridor de América.

58. Podría objetarse que del objeto que llamamos cuatro o del número de las lunas de Júpiter, no nos podemos formar ninguna imagen,[2] como nos la formaríamos de algo autónomo. Pero la autonomía que hemos dado al número no tiene ninguna culpa de ello. Verdad es que se cree fácilmente que en la imagen de cuatro puntos de un dado aparece algo que responde a la palabra «cuatro»; pero esto es una equivocación. Piénsese en un verde prado y compruébese si la imagen cambia cuando se substituye el artículo indeterminado por el numeral «uno». Nada se le añade, mientras que a la palabra «verde», en cambio, le corresponde algo en la imagen. Si uno se imagina la palabra impresa «oro», no se pensará de momento en ningún número. Si uno se pregunta luego de cuántas letras consta, resulta el número 3; pero la imagen no se hace así algo más definida, sino que puede permanecer totalmente inmodificada. El concepto añadido, «letras de la palabra oro», es justamente aquello en lo que descubrimos el número. En el caso de los cuatro puntos de un dado, la cuestión aparece algo más oscura, porque el concepto se nos impone tan inmediatamente



[2] «Imagen» tomada aquí en el sentido de algo gráfico.

por la semejanza de los puntos, que apenas notamos su intervención. El número no puede ser imaginado ni como objeto autónomo, ni como propiedad de una cosa externa, porque ni es algo sensible ni tampoco propiedad de una cosa externa. Donde aparece más claramente esta cuestión es en el caso del número 0. En vano tratará uno de imaginarse 0 estrellas visibles. Cierto que nos podemos imaginar el cielo totalmente cubierto de nubes; pero en este caso no hay nada que corresponda a la palabra «estrella» o al número. Todo lo que nos podemos imaginar es una situación que nos da ocasión para el juicio: no se puede ver ahora ninguna estrella.

59. Cada palabra despierta quizás alguna imagen en nosotros, incluso una palabra tal como «sólo»; pero esta imagen no tiene por qué corresponder al contenido de la palabra; en otros hombres puede ser totalmente distinta. Nos podremos imaginar una situación que induce a un enunciado en el que aparece la palabra; o puede que la palabra hablada evoque en la memoria la palabra escrita.

Esto ocurre no sólo en las partículas. No cabe ninguna duda de que no tenemos ninguna imagen de nuestra distancia del sol. Pues, si bien conocemos la regla de cuántas veces hay que multiplicar un metro, no obstante fracasará cualquier intento de formarnos una representación gráfica partiendo de esta regla, aunque sólo queramos aproximarnos medianamente a nuestro objetivo. Pero esto no es ninguna razón para dudar de la corrección del cálculo por medio del cual se ha hallado la distancia, y no nos impide, en modo alguno, sacar conclusiones fundamentadas en la existencia de esta distancia.

60. Incluso una cosa tan concreta como la Tierra no nos la podemos imaginar tal como hemos aprendido que es; sino que nos contentamos con una bola de tamaño moderado, que nos sirve como símbolo para la Tierra; pero sabemos que ésta es muy diferente de aquélla. Si bien es frecuente que nuestra imagen no responda en absoluto a lo deseado, hacemos juicios con gran seguridad sobre objetos como la Tierra, incluso en los casos en que el tamaño entra en consideración.

Frecuentemente el pensamiento nos lleva más allá de lo imaginable, sin que perdamos por ello las bases en que se apoyan nuestras inferencias. Si bien, según parece, a nosotros los hombres nos es imposible el pensamiento sin imágenes, no obstante, la conexión de éstas con lo pensado sólo puede ser totalmente externa, arbitraria y convencional.

Así, pues, la inimaginabilidad del contenido de una palabra no es razón alguna para negarle todo significado o para excluirla del uso del lenguaje. La apariencia de lo contrario surge únicamente porque consideramos las palabras aisladas y nos preguntamos por su referencia, creyendo que ésta debe ser una imagen. Entonces parece que una palabra carece de contenido, si nos falta para ella una representación interna. Pero siempre hay que tomar en consideración un enunciado completo. Sólo dentro de él tienen las palabras, en realidad, un significado. Las representaciones internas que tenemos en tales casos no tienen por qué corresponder a los componentes lógicos del juicio. Es suficiente que el enunciado como todo tenga un sentido; por él reciben también sus partes un contenido.



Esta observación me parece adecuada para arrojar luz sobre algunos conceptos difíciles, como el de lo infinitamente pequeño,[3] cuyo alcance no se limita, ciertamente, a la matemática.

La autonomía que pretendo que existe para el número no significa que un numeral designe algo fuera del contexto de un enunciado, sino que con ello sólo quiero excluir su uso como predicado o atributo, con lo cual su significado quedaría algo modificado.

61. Pero, quizás se objete, aunque la Tierra sea, en realidad, inimaginable, con todo es una cosa exterior, que ocupa un lugar determinado; ¿pero dónde está el número 4? No está ni fuera ni dentro de nosotros. Entendida en sentido espacial, esta afirmación es correcta. No tiene ningún sentido una determinación local del número 4; pero de ello solamente se sigue que no es un objeto espacial, no que no sea ningún objeto en absoluto. No todo objeto está en alguna parte. Tampoco nuestras imágenes[4] están, en este sentido, dentro de nosotros (no son subcutáneas). Encontramos ahí células ganglionares, corpúsculos sanguíneos y cosas parecidas, pero no imágenes. Los predicados espaciales no son aplicables a ellas; una imagen no está ni a la derecha ni a la izquierda de otra; la distancia entre las imágenes no puede representarse en milímetros. Si, no obstante, decimos que están dentro de nosotros, lo que queremos es caracterizarlas como subjetivas.

[3] Lo que importa es definir el sentido de una ecuación como

$$d\, f(x) = g(x)\, dx,$$

y no, en cambio, mostrar un segmento limitado por dos puntos distintos, cuya longitud fuera *dx*.

[4] Entendiendo este término en sentido puramente psicológico, no psicofísico.

Pero si bien lo subjetivo no ocupa ningún lugar, ¿cómo es posible que el número 4 objetivo no se halle en ninguna parte? Bien, yo afirmo que aquí no radica ninguna contradicción. El número 4 es, de hecho, el mismo para toda persona que se ocupe de él; pero esto no tiene nada que ver con la espacialidad. No toda cosa objetiva tiene un lugar.

**Para obtener el concepto de número, hay que fijar el sentido de una ecuación numérica**

62. ¿Pero cómo puede sernos dado un número, si no podemos tener de él ninguna imagen o intuición? Solamente en el contexto de un enunciado se refieren las palabras a algo. De lo que se tratará, pues, es de determinar el sentido de un enunciado en el que entre un numeral. Esto, de momento, nos deja todavía con mucha libertad de elección. Pero ya hemos establecido que por numerales hay que entender objetos independientes. Con ello nos han sido dados una especie de enunciados que han de tener sentido: los enunciados que expresan que algo se reconoce de nuevo. Si el signo *a* debe designar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si *b* es lo mismo que *a*, aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar este criterio. En nuestro caso deberemos determinar el sentido del enunciado

«el número que corresponde al concepto *F* es el mismo que el que corresponde al concepto *G*»;

esto es, deberemos reproducir el contenido de este enunciado en otra forma, sin emplear la expresión

«el número que corresponde al concepto *F*».

De este modo, estableceremos un criterio general para la igualdad de números. Después de haber conseguido un medio tal de concebir un número determinado y de reconocerlo como el mismo, podremos darle un numeral como nombre propio.

63. Un medio tal lo mencionó ya Hume:[5] «Si se combinan dos números de manera que el uno tenga siempre una unidad que corresponda a toda la unidad del otro, entonces los declararemos iguales.» Parece que en tiempos recientes, la opinión de que la igualdad de números debe definirse mediante una aplicación biyectiva ha recibido muy buena acogida por parte de los matemáticos.[6] Pero se presentan aquí en seguida ciertos inconvenientes y dificultades lógicas, que no debemos pasar por alto, sin antes examinarlos.

La relación de igualdad no se da solamente entre los números. De esto parece desprenderse que esta relación no debe definirse especialmente para este caso. Habría que pensar que el concepto de igualdad ha sido fijado de antemano, y que luego, partiendo de él y del concepto de número, debería inferirse cuándo son iguales los números, sin que fuera preciso añadir para ello una definición especial.

Contra esto hay que observar que todavía no hemos fijado el concepto de número, sino que éste quedará determinado únicamente mediante nuestra definición. Nuestro propósito es formar el contenido de un juicio que pueda concebirse como una ecuación tal, que cada uno de sus miembros sea un número. No pretendemos, pues, definir la igualdad especialmente para este caso, sino obtener, mediante el concepto ya conocido de igualdad, lo que debe ser considerado igual. Naturalmente, esto parecerá un tipo muy extraño de definición, que ciertamente todavía no ha sido estudiado suficientemente por los lógicos; pero que este modo de definir no es inaudito, pueden mostrarlo algunos ejemplos.

64. El juicio: «la recta *a* es paralela a la recta *b*», simbólicamente

$$a/ /b,$$

puede tomarse como una ecuación. Si lo hacemos así, obtenemos el concepto de dirección y podemos decir: «la dirección de la recta *a* es igual a la dirección de la recta *b*». Sustituimos, pues, el signo // por el más general de «=», distribuyendo el contenido particular del primero entre *a* y *b*. Fragmentamos el contenido de manera distinta a la originaria y obtene-

[5] BAUMANN: *Op. cit.*, t. II, p. 565.

[6] V. E. SCHRÖDER: *Op. cit.*, pp. 7 y 8. E. KOSSAK, *Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums (Los elementos de la Aritmética. Programa del Instituto de segunda enseñanza Friedrich Werder).* Berlín, 1877, p. 16. G. CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Fundamentos de una teoría general de multiplicidades).* Leipzig, 1883.

mos así un nuevo concepto. Naturalmente, es frecuente que la cuestión se conciba al revés, y algunos maestros definen: rectas paralelas son aquellas que tienen la misma dirección. El enunciado: «si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí», puede demostrarse muy cómodamente, apelando al enunciado de igualdad formulado análogamente. ¡Lástima, sólo, que el verdadero estado de cosas se ponga, en este caso, invertido! Pues, sin duda, todo lo geométrico debe ser originariamente intuitivo. Y yo me pregunto si alguien tiene alguna intuición de la dirección de una recta. De la recta se tiene una intuición, ciertamente, pero ¿acaso en la intuición de esta recta se distingue además su dirección? ¡Difícilmente! Este concepto se descubre tan sólo a través de una actividad intelectual dependiente de la intuición. En cambio, se tiene una imagen de las rectas paralelas. La demostración antes mencionada se consigue sólo presuponiendo subrepticiamente, con el uso de la palabra «dirección», lo que hay que demostrar; pues si el enunciado: «si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí» fuera incorrecto, entonces a/ /b no se podría transformar en una ecuación.

Análogamente, del paralelismo de planos puede obtenerse un concepto que corresponde a la dirección de las rectas. Para denominarlo he visto escrito el nombre «orientación». De la semejanza geométrica se deriva el concepto de forma, de modo que, por ejemplo, en vez de «ambos triángulos son semejantes», se dice: «ambos triángulos tienen igual forma» o «la forma de un triángulo es igual a la forma del otro». Así, de la semejanza colinear de figuras geométricas puede obtenerse un concepto, al que todavía falta dar un nombre.

65. Para pasar ahora, por ejemplo, del paralelismo[7] al concepto de dirección, intentemos la siguiente definición: el enunciado

«la recta *a* es paralela a la recta *b*»

tiene el mismo significado que

«la dirección de la recta *a* es igual
a la dirección de la recta *b*».

[7] Para poderme expresar más cómodamente y ser comprendido más fácilmente, hablaré aquí del paralelismo. Lo esencial de esta discusión puede traducirse fácilmente al caso de la igualdad numérica.



Esta definición se aparta de lo acostumbrado en la medida en que aparentemente determina algo más la relación ya conocida de igualdad, mientras que, en realidad, debería introducir la expresión «la dirección de la recta *a*», la cual sólo aparece de pasada. De aquí surge una segunda objeción: la de que con semejante estipulación podríamos entrar en contradicción con las leyes conocidas de la igualdad. ¿Cuáles son éstas? En cuanto verdades analíticas, podrán ser formuladas a partir del concepto mismo. La definición de Leibniz es:[8]

«Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.»[9]

Adoptaré esta definición de la igualdad. Que se diga, como Leibniz, «lo mismo», o bien «igual» es irrelevante. «Lo mismo» parece expresar ciertamente una coincidencia perfecta, «igual» sólo una coincidencia en este o aquel respecto; pero se puede adoptar un modo de hablar en el que desaparezca esta diferencia, diciendo, por ejemplo, en vez de «los segmentos son iguales en longitud», «las longitudes de los segmentos son iguales» o «las mismas»; en vez de «las superficies son iguales en color», «los colores de las superficies son iguales». Y así es como hemos utilizado este término antes en los ejemplos. Ahora bien, es en la sustituibilidad generalizada, de hecho, en donde están incluidas todas las leyes de la igualdad.

Para justificar nuestro intento de definición de la dirección de una recta, deberíamos mostrar, pues, que

la dirección de *a*

puede sustituirse en todas partes por

la dirección de *b*,

cuando la recta *a* es paralela a la recta *b*. Esto queda simplificado, en primer lugar, por el hecho de que, con respecto a la dirección de una recta, no conocemos otra aseveración posible que la de coincidencia con la dirección de otra recta. Sólo necesitaríamos, pues, demostrar la sustituibilidad en una

[8] *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (ed. de Erdmann, p. 94).

[9] «Dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin perjuicio de la verdad.» *(N. del T.)*

igualdad de este tipo o en contenidos que incluyeran tales igualdades como elementos componentes.[10] Todas las demás aseveraciones sobre direcciones deberían ser definidas primero, y para estas definiciones, podemos estipular la regla de que debe admitirse la sustituibilidad de la dirección de una recta por la de otra paralela a ella.

66. Pero una tercera objeción puede alzarse todavía contra nuestro intento de definición. En el enunciado

«la dirección de *a* es igual a la dirección de *b*»,

la dirección de *a* aparece como objeto,[11] y con nuestra definición tenemos un medio de reconocer este objeto, cuando aparezca quizás bajo otro ropaje, pongamos por caso, como dirección de *b*. Pero este medio no es suficiente para todos los casos. Siguiéndolo, no se puede decidir, por ejemplo, si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la Tierra. ¡Que se nos perdone este ejemplo que parece absurdo! Naturalmente, nadie confundirá Inglaterra con el eje de la Tierra; pero esto no es un mérito de nuestra definición. Ésta no nos dice nada acerca de si el enunciado

«la dirección de *a* es igual a *q*»

debe ser afirmado o negado, si *q* mismo no viene dado en la forma «la dirección de *b*». Nos falta el concepto de dirección; pues, si lo tuviésemos, podríamos establecer: si *q* no es una dirección, hay que negar el enunciado anterior; si *q* es una dirección, habrá que decidirlo según la definición de antes. Nos vemos tentados a dar la definición:

*q* es una dirección, si hay una recta *b*, cuya dirección es *q*.

[10] En un juicio hipotético, por ejemplo, una igualdad de direcciones podría aparecer como condición o como consecuencia.

[11] El artículo determinado alude a este hecho. Para mí, un concepto es un predicado posible de un contenido de juicio singular; objeto es un sujeto posible de un contenido tal. Si en el enunciado

«la dirección del eje del telescopio es igual a la dirección del eje de la Tierra»,

tomamos la dirección del eje del telescopio como sujeto, entonces el predicado «igual a la dirección del eje de la Tierra» es el predicado. Pero la dirección del eje de la Tierra es solamente una parte del predicado; es un objeto, puesto que también puede tomarse como sujeto.



Pero está claro, entonces, que hemos caído en un círculo. Para poder aplicar esta definición, debemos saber ya en cada caso, si el enunciado

«*q* es igual a la dirección de *b*»

debe ser afirmado o negado.

67. Si quisiéramos decir: *q* es una dirección, si se ha introducido según la definición arriba formulada, entonces tomaríamos el modo en que el objeto *q* ha sido introducido como propiedad del mismo, lo cual no es cierto. La definición de un objeto, en sí misma, no afirma en realidad nada sobre el objeto, sino que fija el significado de un signo. Después de haber ocurrido esto, se transforma en un juicio, que trata del objeto; pero ahora ya no lo introduce y se halla al mismo nivel que otras afirmaciones hechas sobre él. Si se eligiera esta solución, se presupondría que un objeto sólo puede darse de una única manera; pues, de lo contrario, del hecho de que *q* no *hubiera sido* introducido por nuestra definición, no se seguiría que no *puede* ser introducido así. Todas las ecuaciones se reducirían a afirmar que se reconoce como igual aquello que nos viene dado de la misma manera. Pero esto es tan obvio y estéril que no merecería la pena afirmarlo. De hecho, no se podría sacar ninguna conclusión que fuera distinta de cada uno de los presupuestos. La aplicabilidad múltiple y significativa de las ecuaciones proviene más bien de que con ellas se puede reconocer algo que se ha dado de maneras distintas.

68. Dado que de este modo no podemos obtener ningún concepto claramente delimitado de la dirección y, por los mismos motivos, tampoco lo podemos obtener para el número, probemos otra vía. Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, la extensión del concepto «recta paralela a la recta *a*» es igual a la extensión del concepto «recta paralela a la recta *b*», y recíprocamente: si las extensiones de estos conceptos son iguales, *a* es paralela a *b*. Intentemos, pues, definir:

La dirección de la recta *a* es la extensión del concepto «paralelo a la recta *a*».

La forma del triángulo *t* es la extensión del concepto «semejante al triángulo *t*».

Si queremos aplicar esto a nuestro caso, en lugar de rectas o de triángulos, tenemos que poner conceptos, y en lugar del paralelismo o de la semejanza, la posibilidad de establecer una aplicación biyectiva entre los objetos que caen bajo un

concepto y los que caen bajo el otro. En aras de la brevedad, diré que el concepto *F* es *equinumérico*[12] al concepto *G*, si existe la antedicha posibilidad; pero pido que este término se tome como una designación escogida arbitrariamente, cuyo significado no debe inferirse de su composición lingüística, sino de esta estipulación.

Por consiguiente, defino:

el número que corresponde al concepto *F* es la extensión[13] del concepto «equinumérico al concepto *F*».

69. De momento, quizá sea poco evidente que esta definición es adecuada. ¿Pues no se entiende por extensión de un concepto algo distinto? Lo que se entiende por ella resulta claro de las afirmaciones básicas que se pueden hacer sobre las extensiones de conceptos. Son las siguientes:

1. La igualdad.
2. Que el uno abarca más cosas que el otro.

Ahora bien, el enunciado:

la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*» es igual a la extensión del concepto «equinumérico al concepto *G*» es verdadero si y sólo si también es verdadero el enunciado

«al concepto *F* le corresponde el mismo número que al concepto *G*». En esto hay, pues, acuerdo completo.

Cierto que no se dice que un número abarca más cosas

[12] Frege introduce aquí el neologismo alemán «*gleiczahlig*», que hemos traducido por «equinumérico»; este concepto corresponde, en la Teoría de Conjuntos cantoriana, al de *equivalencia* o *equipolencia* entre conjuntos: dos conjuntos son equipolentes si se puede establecer una aplicación biyectiva entre ellos. *(N. del T.)*

[13] Creo que, en vez de «extensión del concepto», podría decirse sencillamente «concepto». Pero se objetarían dos cosas:

1.ª Que esto se hallaría en contradicción con mi afirmación anterior de que cada uno de los números es un objeto, lo cual se indica por el artículo determinado en expresiones como «el dos» y por la imposibilidad de hablar de unos, doses, etc., en plural, así como por el hecho de que el número constituye sólo una parte del predicado de asignación numérica.

2.ª Que los conceptos pueden ser de la misma extensión, sin coincidir.

Creo que ambas objeciones pueden ser eliminadas; pero esto nos llevaría ahora demasiado lejos. Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto.



que otro, en el sentido que la extensión de un concepto abarca más cosas que la de otro; pero tampoco puede presentarse el caso de que

la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*» abarque más cosas que

la extensión del concepto «equinumérico al concepto *G*»; sino que si todos los conceptos que son equinuméricos al *G* son también equinuméricos al *F*, entonces recíprocamente, también todos los conceptos que son equinuméricos al *F*, son equinuméricos al *G*. Este «abarca más» no debe confundirse, naturalmente, con el «mayor que», que se da en los números.

Claro que todavía es imaginable otro caso, el de que la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*» abarcase más o abarcarse menos que otra extensión de un concepto, que, según nuestra definición no podría ser un número; y no es usual decir de un número que abarca más o que abarca menos que la extensión de un concepto; pero tampoco existe ningún impedimento para aceptar esta manera de hablar, caso de que ésta debiera presentarse alguna vez.

## Resumen y confirmación de nuestra definición

70. Las definiciones se confirman por su fertilidad. Aquellas que podrían omitirse sin dejar una laguna en la demostración deben ser rechazadas como totalmente sin valor.

Tratemos de ver, pues, si se pueden deducir propiedades conocidas de los números a partir de nuestra definición de número, que corresponde al concepto *F*. Aquí nos serán suficientes las propiedades más sencillas.

Para ello es necesario concebir la igualdad numérica con algo más de precisión. La hemos definido mediante una aplicación biyectiva, y ahora debo exponer cómo hay que entender esta expresión, porque sería fácil suponer que en ella hay algo intuitivo.

Consideremos el siguiente ejemplo. Si un camarero quiere estar seguro de que pone sobre la mesa igual número de cuchillos que de platos, no necesita contar ni los primeros ni los segundos; basta con que coloque a la derecha de cada plato un cuchillo, de modo que cada cuchillo de la mesa se encuentre justo a la derecha de un plato. Los platos y cuchillos estarán, de este modo, en correspondencia biyectiva, y esto gracias a la igualdad de la relación de localización. Si en el enunciado

«*a* está justo a la derecha de *A*».

imaginamos que sustituimos *a* y *A* por otros objetos cualesquiera, la parte que queda inmodificada en este enunciado constituye la esencia de la relación. Generalicemos esto.

Si en el contenido de un juicio que trata de un objeto *a* y de un objeto *b*, separamos *a* y *b*, nos quedará un concepto relacional, que, por consiguiente, deberá ser doblemente completado. Si en el enunciado

«la Tierra tiene más masa que la Luna»,

separamos «la Tierra», obtenemos el concepto «tiene más masa que la Luna». Si, en cambio, separamos el objeto «la Luna», obtenemos el concepto «tiene menos masa que la Tierra». Si separamos ambos a la vez, nos queda un concepto relacional, que por sí solo tiene tan poco sentido como un concepto simple: exige siempre una compleción para convertirse en un juicio con contenido. Pero esta compleción puede ocurrir de diversas maneras: en vez de la Tierra y la Luna, puedo poner, por ejemplo, el sol y la Tierra, y por ello se efectúa precisamente la separación.

Cada uno de los pares de objetos correlacionados está enlazado con el concepto relacional —podría decirse como sujeto— de manera análoga a como lo está el objeto individual con el concepto bajo el cual cae. El sujeto, en nuestro caso, es compuesto. A veces, cuando la relación es reversible, esta situación también queda de manifiesto en el lenguaje, como en el enunciado «Peleo y Tetis eran los padres de Aquiles».[14] En otros casos, como, por ejemplo, en el enunciado «la Tierra es mayor que la Luna», apenas sería posible reproducir el contenido del mismo de tal modo que «la Tierra y la Luna» apareciese como sujeto compuesto, porque el «y» siempre indica una cierta equiparación. Pero esto no atañe a la cuestión.

El concepto relacional, pues, lo mismo que el simple, pertenece a la lógica pura. No nos interesa aquí el contenido particular de la relación, sino solamente la forma lógica. Y sea lo que sea lo que pueda afirmarse sobre ésta, se tratará

[14] Este caso no debe ser confundido con aquel en que el «y» sólo aparentemente une los sujetos, tratándose en realidad de dos enunciaciados.



de algo conocido analíticamente y a priori. Esto es válido tanto para los conceptos relacionales como para los demás.

Así como

«*a* cae bajo el concepto *F*»

es la forma general del contenido de un juicio, que trata de un objeto *a*, también puede admitirse que

«*a* se halla en la relación ∅ con *b*»

es la forma general del contenido de un juicio, que trata del objeto *a* y del objeto *b*.

71. Ahora bien, si todo objeto que cae bajo el concepto *F*, se halla en la relación con un objeto que caiga bajo el concepto *G*, y si con todo objeto que cae bajo el concepto *G* está en la relación ∅ un objeto que cae bajo *F*, entonces los objetos que caen bajo *F* y *G* están correlacionados por la relación ∅.

Todavía podemos preguntar qué significa la expresión

«todo objeto que cae bajo *F*, se halla en la relación ∅ con un objeto que cae bajo *G*»,

cuando ningún objeto cae bajo *F*. Lo que entiendo por esto es: los dos enunciados

«*a* cae bajo *F*»
y
«*a* no se halla en la relación ∅ con ninguno de los objetos que caen bajo *G*»

no pueden coexistir juntos, sea lo que sea lo que *a* designe, de modo que, o bien el primero, o bien el segundo, o bien ambos a la vez son falsos. De aquí se desprende que «todo objeto que cae bajo *F* está en la relación ∅ con un objeto que cae bajo *G*», cuando no existe ningún objeto que caiga bajo *F*, porque entonces hay que negar siempre el primer enunciado

«*a* cae bajo *F*»,

sea lo que sea *a*.

Asimismo, el enunciado

«con cada objeto que cae bajo *G*, está en la relación ∅ un objeto que cae bajo *F*»,

significa que ambos enunciados

«*a* cae bajo *G*»

y

«ninguno de los objetos que caen bajo *F* se halla en la relación ∅ con *a*»

no pueden coexistir juntos, sea lo que sea *a*.

72. Hemos visto, pues, cuándo los objetos que caen bajo los conceptos *F* y *G* están correlacionados por la relación ∅. Ahora bien, esta correspondencia debe ser aquí unívoca en ambos sentidos.[15] Lo que entiendo por esto es que son válidos los dos enunciados siguientes:

1. Si *d* está en la relación ∅ con *a*, y si *d* está en la relación ∅ con *e*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.

2. Si *d* está en la relación ∅ con *a*, y si *b* está en la relación ∅ con *a*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *b* y *a*, *d* es lo mismo que *b*.

Con ello hemos reducido la aplicación biyectiva a una relación puramente lógica y ahora podemos definir:

la expresión

«el concepto *F* es equinumérico al concepto *G*»

significa lo mismo que la expresión

«existe una relación ∅ que a los objetos que caen bajo el concepto *F* les aplica biyectivamente los objetos que caen bajo *G*».

Repito:

«el número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto "equinumérico al concepto *F*"»

y añado:

la expresión

[15] Es decir, debe ser biyectiva. *(N. del T.)*



«*n* es un número»

significa lo mismo que la expresión

«existe un concepto tal, que *n* es el número que le corresponde».

De este modo se ha definido el concepto de número, claro que aparentemente por sí mismo, pero, con todo, no nos hemos equivocado, porque «el número que corresponde al concepto *F*» ya ha sido definido antes.

73. Ahora queremos mostrar que el número que corresponde al concepto *F* es igual al número que corresponde al concepto *G*, si el concepto *F* es equinumérico al concepto *G*. Naturalmente, esto suena a tautología, pero no lo es, ya que el significado del término «equinumérico» no proviene de su composición lingüística, sino de la definición que acabamos de dar. Con otras palabras: hay que demostrar que, bajo este presupuesto valen, generalmente, los enunciados:

si el concepto *H* es equinumérico al concepto *F*, entonces también es equinumérico al concepto *G*;

y

si el concepto *H* es equinumérico al concepto *G*, entonces también es equinumérico al concepto *F*.

El primer enunciado equivale a decir que existe una relación que aplica biyectivamente los objetos que caen bajo el concepto *H* a los objetos que caen bajo el concepto *G*, si existe una relación ∅ que aplica biyectivamente los objetos que caen bajo el concepto *F* a los que caen bajo el concepto *G*, y si existe una relación Ψ que aplica biyectivamente los objetos que caen bajo el concepto *H* a los que caen bajo el concepto *F*. La siguiente ordenación de las letras hará esto más claro:

H Ψ F ∅ G.

Tal relación puede indicarse de hecho: se halla en el contenido de juicio

«existe un objeto con el que $c$ está en la relación $\Psi$, y que está con $b$ en la relación $\varnothing$»,

si separamos $c$ y $b$ de ahí (es decir, si los consideramos como términos de la relación). Puede mostrarse que esta relación es biyectiva, y que aplica los objetos que caen bajo el concepto $H$ a los que caen bajo el concepto $G$.

De manera similar puede demostrarse también el segundo enunciado.[16] Espero que estas indicaciones sean suficientes para hacer ver que en todo esto no necesitamos tomar como fundamento de la prueba la intuición, y que nuestras definiciones pueden servir para algo.

74. Podemos pasar ahora a las definiciones de cada uno de los números.

Dado que bajo el concepto «desigual consigo mismo» no cae nada, defino:

> 0 es el número que corresponde al concepto «desigual consigo mismo».

Quizá resulte chocante que yo hable aquí de un concepto. Puede que se objete que en ello está contenida una contradicción, y se recuerden nuestros viejos tópicos, tales como el hierro de madera y el círculo cuadrado. Ahora bien, yo creo que estos últimos no son tan malos como se les pinta. Cierto que no son precisamente muy útiles; pero no pueden causar ningún daño, siempre que no se presuponga que algo cae bajo ellos; y esto no se presupone por el mero uso de los conceptos. Que un concepto contenga una contradicción, no siempre es tan evidente que no necesite de alguna investigación; para ello, primero hay que tenerlo y tratarlo lógicamente como cualquier otro concepto. Todo lo que de parte de la lógica y para el rigor de la demostración puede exigirse de un concepto, es una delimitación clara según la cual para cada objeto esté determinado si cae bajo el concepto dado o no. Pues bien, esta exigencia es satisfecha completamente por los conceptos que contienen una contradicción, tales como «desigual consigo mismo», pues de todo objeto se sabe que no cae bajo tal concepto.[17]

[16] Lo mismo para el recíproco: si el número que corresponde al concepto $F$ es el mismo que el que corresponde al concepto $G$, entonces el concepto $F$ es equinumérico al concepto $G$.

[17] Cuestión totalmente distinta es la definición de un objeto a partir de un concepto bajo el cual el primero caiga. La expresión «la mayor fracción propia», por ejemplo, no tiene ningún contenido, porque el artículo determinado manifiesta la pretensión de referirse a un objeto determinado. Por el contrario, el concepto «fracción que es menor que 1 y que está formada de tal manera que ninguna fracción que sea menor que 1 la sobrepasa en magnitud» es totalmente inobjetable, y para poder demostrar que no existe tal fracción, se necesita incluso este concepto, si bien contiene una contradicción. Pero si se quisiera definir un objeto mediante este concepto, sería necesario, en todo caso, probar antes dos cosas:

1. Que bajo este concepto cae un objeto.
2. Que bajo él cae un único objeto.

Dado que ya el primer enunciado es falso para «la mayor fracción propia», resulta que esta expresión carece de sentido.



Empleo el término «concepto» de modo que

> «$a$ cae bajo el concepto $F$»

es la forma general del contenido de un juicio, que trata de un objeto $a$ y que sigue siendo un juicio, sea lo que sea lo que reemplace a $a$. Y en este sentido,

> «$a$ cae bajo el concepto desigual consigo mismo»;

tiene el mismo significado que

> «$a$ es desigual consigo mismo»
> o
> «$a$ no es igual a $a$».

Para la definición del 0, podría haber tomado cualquier otro concepto bajo el cual no caiga nada. Pero me interesaba elegir uno del que pudiera demostrarse esto último con medios puramente lógicos; y para ello, el más cómodo que se nos ofrece es «desigual consigo mismo», entendiendo por «igual» la definición antes mencionada de Leibniz, que es puramente lógica.

75. Mediante las estipulaciones anteriores, puede demostrarse ya que cualquier concepto, bajo el cual nada caiga, es equinumérico a cualquier otro concepto, bajo el cual nada caiga, y solamente con uno tal, de lo cual resulta que 0 es el número que corresponde a semejante concepto, y que ningún objeto cae bajo un concepto cuando el número que corresponde a éste es el 0.

Supongamos que no cae ningún objeto ni bajo el concepto $F$ ni bajo el concepto $G$; para demostrar la equinumerici-

dad, necesitamos una relación ∅, para la cual valgan los enunciados:

> todo objeto que cae bajo *F* está en la relación ∅ con un objeto que cae bajo *G;* con todo objeto que cae bajo G está un objeto que cae bajo *F* en la relación ∅.

Después de lo que antes se ha dicho sobre el significado de estas expresiones, por hipótesis cumple estas condiciones cualquier relación; por tanto, también la igualdad, que además es biyectiva, pues con ella se cumplen los dos enunciados antes exigidos para ella.

Si, por el contrario bajo *G* cae un objeto, por ejemplo, *a* mientras que bajo *F* no cae ninguno, entonces los dos enunciados

«*a* cae bajo *G*»
y

«ninguno de los objetos que caen bajo *F*
está con *a* en la relación ∅»

son válidos conjuntamente para toda relación ∅; pues el primero es verdadero por la primera hipótesis, y el segundo lo es por la segunda. En efecto, no existe ningún objeto que caiga bajo *F,* tampoco habrá ningún objeto que esté en una relación cualquiera con *a.* No existe, pues, ninguna relación que, según nuestra definición, aplique los objetos que caen bajo *F* a los que caen bajo *G,* y, por consiguiente, los conceptos *F* y *G* son no equinuméricos.

76. Ahora voy a definir la relación en la que están dos miembros adyacentes de la serie de los números naturales. El enunciado:

> «existe un concepto *F* y un objeto *x* que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto *F* es *n,* y que el número que corresponde al concepto "que cae bajo *F,* pero no es igual a *x*" es *m*»

se tomará como equivalente a

> «*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales».



Evito la expresión «*n* es *el* número que sigue a *m*», porque para la justificación del artículo determinado deberían demostrarse primero dos enunciados.[18] Por la misma razón, todavía no digo aquí «n=m+1», porque, mediante el signo de igualdad, también se designa (m+1) como objeto.

77. Para llegar ahora al número 0, debemos mostrar primero que existe algo que, en la serie de los números naturales, sigue inmediatamente al 0.

Consideremos el concepto —o, si se prefiere, el predicado— «igual a 0». Bajo éste cae el 0. Bajo el concepto «igual a 0, pero no igual a 0», por el contrario, no cae ningún objeto, de modo que 0 es el número que corresponde a este concepto. Por consiguiente, tenemos un concepto «igual a 0» y un objeto 0 que cae bajo él, para los cuales vale lo siguiente:

> el número que corresponde al concepto «igual a 0» es igual al número que corresponde al concepto «igual a 0»;
>
> el número que corresponde al concepto «igual a 0, pero no igual a 0» es el 0.

Por lo tanto, según nuestra definición, el número que corresponde al concepto «igual a 0» sigue inmediatamente al 0 en la serie de los números naturales.

Si definimos ahora:

> 1 es el número que corresponde al concepto «igual a 0»,

podemos expresar el último enunciado así:

> 1 sigue inmediatamente al 0 en la serie de los números naturales.

Quizá no sea superfluo hacer notar que la definición del 1 no presupone ningún hecho observado,[19] para su legitimidad objetiva; pues es fácil confundirse por el hecho de que deben cumplirse ciertas condiciones subjetivas para hacernos posible la definición y de que a esta definición nos inducen percepciones sensoriales.[20] No obstante, todo esto puede ser

[18] Véase la nota anterior.
[19] Enunciado sin generalidad.
[20] V. B. ERDMANN: *Die Axiome der Geometrie (Los axiomas de la geometría),* p. 164.

correcto, sin que los enunciados deducidos dejen de ser a priori. Entre tales condiciones está, por ejemplo, la de que la sangre debe llegar al cerebro en suficiente cantidad y composición adecuada —al menos, por lo que sabemos—; pero la verdad de nuestro último enunciado es independiente de esto; persiste hasta cuando esto ya no ocurre; e incluso si alguna vez todos los seres racionales se sumieran en un letargo invernal, no por ello desaparecería esa verdad durante todo el letargo, sino que quedaría totalmente inalterada. La verdad de un enunciado no es justamente su ser-pensada.

78. Presento a continuación algunos enunciados que se demuestran mediante nuestras definiciones. El lector verá fácilmente, de una ojeada, cómo puede hacerse esto.

1. Si *a* sigue inmediatamente a 0 en la serie de los números naturales, entonces es $a=1$.
2. Si 1 es el número que corresponde a un concepto, existe un objeto que cae bajo el concepto.
3. Si 1 es el número que corresponde a un concepto *F*; si el objeto *x* cae bajo el concepto *F*, y si *y* cae bajo el concepto *F*, entonces es $x=y$; esto es, *x* es lo mismo que *y*.
4. Si bajo un concepto *F* cae un objeto, y si de ello se sigue en general que del hecho de que *x* caiga bajo el concepto *F* y de que *y* caiga bajo el concepto *F*, se deduce que $x=y$, entonces 1 es el número que corresponde al concepto *F*.
5. La relación de *m* con *n*, que se establece con el enunciado.

«*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales»,

es biyectiva.

Con esto, todavía no se ha establecido que para cada número existe otro que le sigue, o al cual el primero sigue inmediatamente en la serie de los números naturales.

6. Todo número, fuera del 0, sigue inmediatamente a un número en la serie de los números naturales.

79. Para poder demostrar ahora que a todo número *(n)* le sigue inmediatamente un número en la serie de los números naturales, hay que presentar un concepto que corresponde a este último número. Como tal concepto elegimos

«perteneciente a la serie de números naturales que termina con n»,



que primero tiene que ser definido.

Ante todo, voy a repetir con palabras algo distintas la definición que he dado en mi obra *Begriffschift* de la sucesión en una serie.

El enunciado

«si todo objeto con el que *x* está en la relación ∅ cae bajo el concepto *F*, y si del hecho de que *d* caiga bajo el concepto *F*, se sigue, en general, sea lo que sea *d*, que todo objeto con el que *d*, está en la relación ∅, cae bajo el concepto *F*, entonces *y* cae bajo el concepto *F*, sea *F* el concepto que sea»

tiene el mismo significado que

«*y* sigue a *x* en la serie-∅»

y que

«*x* precede a *y* en la serie-∅».

80. Algunas observaciones a esto no serán superfluas. Como la relación ∅ se ha dejado indeterminada, la serie no debe imaginarse necesariamente bajo la forma de una ordenación espacial y temporal, si bien estos casos no están excluidos.

Quizá se podría considerar más natural una definición distinta, por ejemplo: si, partiendo de *x*, dirigimos nuestra atención siempre de un objeto a otro con el que esté en la relación ∅, y si de este modo podemos alcanzar finalmente *y*, se dirá entonces que *y* sigue a *x* en la serie-∅.

Esto es un modo de investigar la cuestión, no una definición. Que en la marcha de nuestra atención alcancemos *y*, puede depender de ciertas circunstancias accesorias subjetivas, por ejemplo, del tiempo que tengamos a nuestra disposición, o de nuestro conocimiento de las cosas. Que *y* siga a *x* en la serie-∅, en general, no tiene nada que ver con nuestra atención ni con las condiciones de su traslación, sino que es una cuestión de hecho, como lo es el hecho de que una hoja verde refleja determinados rayos de luz, tanto si éstos van a parar a mis ojos, produciendo una sensación, como si no, de que un grano de sal es soluble en agua, tanto si yo lo tiro en el agua y observo el proceso o no, y de que sigue siendo soluble incluso cuando yo no tengo ninguna posibilidad de hacer un experimento con él.

Mediante mi definición, la cuestión ha pasado del campo de las posibilidades subjetivas a la determinación objetiva. De hecho: que de ciertos enunciados se siga otro, es algo objetivo, independiente de las leyes del movimiento de nuestra atención, y para ello da lo mismo que saquemos realmente la conclusión o no. Se trata aquí de un criterio que permite decidir la cuestión siempre que ésta pueda plantearse, aunque en casos particulares dificultades externas nos puedan impedir llegar a tal decisión. Esto es irrelevante para la cuestión en sí misma.

No siempre tenemos que recorrer todos los miembros intermedios de la serie, desde el primero hasta el objeto deseado, para estar seguros de que éste se sigue del primero. Si, por ejemplo, en la serie-∅ se ha establecido ya que *b* se sigue de *a* y que *c* se sigue de *b*, de nuestra definición podemos concluir que *c* se sigue de *a*, sin conocer siquiera los miembros intermedios entre ambos pares.

Sólo mediante esta definición de la sucesión en una serie es posible reducir la inferencia de *n* a $(n+1)$, que aparentemente es peculiar de la matemática, a las leyes lógicas generales.

81. Si por la relación ∅ tomamos la que se establece entre *m* y *n* por medio del enunciado

> «*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales»,

en vez de «serie-∅», hablaremos de «serie de los números naturales».

Prosigo definiendo:

el enunciado

> «*y* sigue a *x* en la serie-∅, o *y* es lo mismo que *x*»

tiene el mismo significado que

> «*y* pertenece a la serie-∅ que empieza con *x*»

y que

> «*x* pertenece a la serie-∅ que termina con *y*».



Por consiguiente, *a* pertenece a la serie de los números naturales que termina con *n*, si, o bien *n* sigue a *a* en la serie de los números naturales, o bien es igual a *a*.[21]

82. Hay que probar ahora que —bajo una condición que todavía hay que dar— el número que corresponde al concepto

> «perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *n*»,

sigue inmediatamente a *n* en la serie de los números naturales. Y con ello quedará demostrado que existe un número que sigue inmediatamente a *n* en la serie de los números naturales, por tanto, que no existe ningún último miembro de esta serie. Es evidente que por vía empírica o por medio de la inducción, no puede fundamentarse este enunciado.

Nos llevaría demasiado lejos aquí realizar la demostración misma. Sólo indicaremos brevemente sus líneas generales. Hay que demostrar que:

1. Si *a* sigue inmediatamente a *d* en la serie de los números naturales, y si para *d* vale que:

el número que corresponde al concepto

> «perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *n*»

sigue inmediatamente a *d* en la serie de los números naturales, entonces también vale para *a* que:

el número que corresponde al concepto

> «perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *a*»

sigue inmediatamente a *a* en la serie de los números naturales.

En segundo lugar, hay que demostrar que para el 0 vale lo que acabamos de afirmar para *d* y para *a* en los enunciados anteriores, y entonces hay que deducir que también vale para *n*, si *n* pertenece a la serie de los números naturales que empieza con 0. Este modo de inferencia es una aplicación de la definición que he dado de la expresión

[21] Si *n* no es un número, entonces sólo *n* mismo pertenece a la serie de los números naturales que termina con *n*. ¡Que no nos sorprenda la expresión!

«$y$ sigue a $x$ en la serie de los números naturales»,

tomándose como concepto $F$ la afirmación común para $d$ y para $a$, y sustituyendo a éstos por 0 y $n$.

83. Para demostrar el enunciado 1 del último apartado, tenemos que demostrar que $a$ es el número que corresponde al concepto «perteneciente a la serie de los números naturales que termina con $a$, pero que no es igual a $a$». Y para ello hay que demostrar, a su vez, que este concepto es de igual extensión que el concepto «perteneciente a la serie de los números naturales que termina con $d$». Para esto se necesita el enunciado de que ningún objeto que pertenezca a la serie de los números naturales que empieza con 0, puede seguirse a sí mismo en la serie de los números naturales. Esto debe demostrarse, asimismo, mediante nuestra definición de sucesión en una serie, como se ha indicado más arriba.[22]

Por esto nos vemos obligados a añadir una condición al enunciado de que el número que corresponde al concepto

«perteneciente a la serie de los números naturales que termina con $n$»,

sigue inmediatamente a $n$ en la serie de los números naturales; esta condición es que $n$ pertenezca a la serie de los números naturales que empieza con 0. Para ello es conveniente una expresión abreviada que defino ahora:
el enunciado

«$n$ pertenece a la serie de los números naturales que empieza con 0»

tiene el mismo significado que

«$n$ es un número finito».

[22] E. Schröder (*Op. cit.*, p. 63) parece considerar este enunciado como una consecuencia de una notación que podría imaginarse distinta. También aquí es de notar el inconveniente, que perjudica toda su exposición de esta cuestión, de que uno no sabe realmente si el número es un signo, y cuál es entonces su significado, o bien si es justamente este significado. De estipular distintos signos, de modo que nunca vuelva a salir el mismo, no se desprende todavía que estos signos signifiquen cosas distintas.



Entonces podemos expresar así el último enunciado: ningún número finito se sigue a sí mismo en la serie de los números naturales.

## Números infinitos

84. A los números finitos se contraponen los infinitos. El número que corresponde al concepto «número finito» es un número infinito. Designémoslo por $\infty_1$. Si fuera finito, no podría seguirse a sí mismo en la serie de los números naturales. Pero puede probarse que $\infty_1$ cumple esto.

En el número infinito $\infty_1$ así definido no radica nada misterioso o maravilloso: «El número que corresponde al concepto $F$ es $\infty_1$» significa ni más ni menos que: existe una relación que aplica biyectivamente los objetos que caen bajo el concepto $F$ a los números finitos. Siguiendo nuestras definiciones, esto tiene un sentido perfectamente claro e inequívoco; y esto es suficiente para justificar el uso del signo $\infty_1$ para asegurarle un significado. Que no podamos formarnos ninguna imagen de un número infinito es totalmente irrelevante y, por lo demás, ocurre también con números finitos. Nuestro número $\infty_1$ posee, de este modo, una naturaleza tan determinada como cualquier número finito: puede ser reconocido sin duda alguna como el mismo número y puede ser distinguido de cualquier otro.

85. Recientemente, en una obra notable,[23] G. Cantor ha introducido los números infinitos. Estoy completamente de acuerdo con él en la valoración que hace de la opinión según la cual sólo los números finitos deben ser admitidos como reales. Sensorialmente perceptibles y espaciales no lo son ni estos últimos, ni las fracciones, ni los números negativos, irracionales y complejos, y si se denomina real lo que actúa sobre los sentidos, o por lo menos, lo que tiene efectos que pueden dar como consecuencias próximas o remotas percepciones sensoriales, entonces, naturalmente, no es real ninguno de estos números. Pero tampoco necesitamos estas percepciones como fundamentos para las pruebas de nuestros teoremas. Un nombre o un signo, que haya sido introducido de manera lógicamente inobjetable, podemos utilizarlo sin temor en nuestras investigaciones, y por esto está nuestro número $\infty_1$ tan justificado como el dos o el tres.

[23] *Op. cit.*, Leipzig, 1883.

Si bien, según creo, concuerdo con Cantor en este punto, me aparto de él, en cambio, en cierta medida, por lo que hace a la denominación. A mi número lo llama él «potencia», mientras que su concepto[24] de número lo refiere a la ordenación. Para números finitos, naturalmente, se da una independencia respecto de su orden en la serie, pero esto no ocurre para los infinitamente grandes. Ahora bien, el uso corriente en el lenguaje de la palabra «número» y de la pregunta «¿cuántos?» no contiene ninguna referencia a una determinada ordenación. El número de Cantor responde más bien a la pregunta: «¿Qué miembro en la sucesión es el miembro final?». Por esto me parece que mi denominación concuerda mejor con el uso corriente. Si se emplía el significado de una palabra, habrá que procurar que conserven su validez el mayor número posible de enunciados generales, tanto más uno tan fundamental, como el de que el número es independiente del orden en la serie. Nosotros no hemos precisado ninguna ampliación, porque nuestro concepto de número comprende inmediatamente también los números infinitos.

86. Para obtener sus números infinitos, introduce Cantor el concepto relacional de seguir en una sucesión, que se aparta de mi «seguir en una serie». Según él, surgiría una sucesión, por ejemplo, si se ordenaran los números enteros positivos finitos de tal manera que los impares se sucedieran unos a otros según el orden natural, y asimismo los pares, estipulándose además que cada número par debe seguir a cada número impar. En esta sucesión, el 0, por ejemplo, seguiría al 13. Pero ningún número precedería inmediatamente al 0. Ahora bien, éste es un caso que no puede ocurrir según la definición que yo he dado de seguir en la serie. Puede demostrarse rigurosamente, sin utilizar ningún axioma de la intuición, que si $y$ sigue a $x$ en la serie-$\varnothing$, existe un objeto que precede inmediatamente a $y$ en esta serie. Me parece que aún nos faltan definiciones precisas del seguir en una sucesión y del número cantoriano. Así, Cantor apela a la algo misteriosa «intuición interna» en casos en que debería intentarse una prueba a partir de las definiciones y en que esto sería sin duda posible. Pues creo poder prever cómo se definirían estos conceptos. En todo caso, con estas observaciones

[24] Esta expresión puede parecer contradecir la objetividad del concepto antes puesta de relieve; pero subjetiva aquí lo es solamente la denominación.



no quiero atacar en absoluto su justificación y fertilidad. Por el contrario, saludo a estas investigaciones como una extensión de la ciencia, especialmente porque, mediante ellas, se ha trazado una vía puramente aritmética para llegar a números infinitos (potencias) de orden superior.

## Capítulo quinto

# Conclusión

87. Espero haber hecho verosímil en esta obra la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos y que, por consiguiente, son a priori. La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada. Las aplicaciones de la aritmética en la explicación de la naturaleza serían elaboraciones lógicas de hechos observados;[1] calcular sería deducir. Las leyes numéricas no necesitan, como cree Baumann,[2] una confirmación práctica para ser aplicables en el mundo exterior; pues en el mundo exterior, la totalidad de lo espacial, no hay conceptos ni propiedades de conceptos, ni números. O sea, que las leyes numéricas no son propiamente aplicables a las cosas externas: no son leyes naturales. Pero sí, en cambio, son aplicables a juicios válidos para cosas del mundo exterior: son leyes de las leyes naturales. No afirman una conexión entre fenómenos naturales, sino una conexión entre juicios, y a éstos pertenecen también las leyes naturales.

88. Kant[3] subestimó claramente el valor de los juicios analíticos —ciertamente a consecuencia de una delimitación conceptual demasiado estrecha—, si bien parece que también barruntó el concepto más amplio aquí utilizado.[4] Si se parte de su definición, la división de los juicios en analíticos y sintéticos no es exhaustiva. Kant estaba pensando, al hablar así, en el caso del juicio afirmativo universal. Entonces puede hablarse de un concepto de sujeto y preguntarse si el concepto de predicado está contenido en él —a consecuencia de su

[1] El observar mismo incluye ya una actividad lógica.
[2] *Op. cit.*, t. II, p. 670.
[3] *Op. cit.*, III, p. 39 y ss. (Ed. originales: A 6 y ss/B 10 y ss).
[4] En la pág. 43. Dice que un enunciado sintético puede admitirse por el principio de contradicción, únicamente cuando se presupone otro enunciado sintético.

misma definición. Pero, ¿qué ocurre cuando el sujeto es un objeto único? ¿Y qué cuando se trata de un juicio de existencia? En este sentido no se puede hablar entonces de un concepto de sujeto en absoluto. Parece que Kant cree que el concepto viene definido por las características que se le asocian; pero éste es uno de los modos menos fructíferos de formar conceptos. Si se echa una ojeada a las definiciones dadas más arriba, apenas se hallará ninguna de este tipo. Lo mismo vale también para las definiciones realmente fructíferas en la matemática, por ejemplo, la de continuidad de una función. No tenemos en tal caso una serie de características asociadas, sino una conexión más íntima, me atrevería a decir más orgánica, de las determinaciones. Podemos hacer intuitiva esta diferencia mediante una imagen geométrica. Si representamos los conceptos (o sus extensiones) por medio de áreas de una superficie, al concepto definido por características asociadas le corresponde el área que es común a todas las áreas de las características; aquélla está delimitada por segmentos de las líneas fronterizas de éstas. En una definición semejante se trata, pues —para hablar figuradamente— de utilizar las líneas ya dadas de una manera distinta para la delimitación de un área.[5] Pero en tal caso no surge nada esencialmente nuevo. Las definiciones conceptuales más útiles son las que marcan líneas fronterizas que aún no habían sido trazadas en absoluto. Lo que pueda inferirse a partir de ellas no puede determinarse de antemano; en este caso no se vuelve simplemente a sacar de la caja lo que se había metido en ella. Las conclusiones que sacamos de este tipo de definición aumentan nuestro conocimiento, y, siguiendo a Kant, deberían ser consideradas en consecuencia como sintéticas; no obstante, pueden ser demostradas de modo puramente lógico y, por lo tanto, son analíticas. Están contenidas de hecho en las definiciones, pero lo están como la planta en la semilla, no como las vigas en la casa. Es frecuente que se precisen varias definiciones para la demostración de un enunciado, el cual, por consiguiente, no se halla contenido en ninguna de ellas por separado y, con todo, se sigue lógicamente de todas juntas.

89. Debo también contradecir la universalidad de la afirmación de Kant:[6] la de que sin la sensibilidad no nos sería dado ningún objeto. El cero, el uno, son objetos que no

[5] Lo mismo si las características están unidas por «o».
[6] *Op. cit.*, III, p. 82.



nos pueden venir dados por los sentidos. Incluso aquellos que consideran intuitivos los números pequeños deberán conceder que no les puede venir dado intuitivamente ninguno de los números mayores que 1 000 ($1000^{1000}$), y acerca de los cuales, no obstante, sabemos bastantes cosas. Quizá utilizaba Kant el término «objeto» en un sentido algo distinto; pero entonces caen fuera de su consideración el cero, el uno, o nuestro $\infty_1$; pues tampoco son conceptos, y también de los conceptos exige Kant que se les atribuya un objeto en la intuición.

Para no atraer sobre mí la acusación de hacer una crítica mezquina a un genio, al que sólo podemos ver con admiración agradecida, creo que estoy obligado a poner de relieve las coincidencias, que superan en mucho las discrepancias. Para referirnos sólo a lo que nos atañe más de cerca, Kant tiene el gran mérito de haber establecido la diferenciación entre juicios sintéticos y analíticos. Al calificar las verdades geométricas de sintéticas y a priori, reveló su verdadera naturaleza. Y todavía hoy vale la pena repetir esto, porque es aún frecuente que se ignore. Si Kant se equivocó respecto a la aritmética, esto no representa, según creo, ninguna disminución esencial en sus méritos. Lo que le importaba a él es que hubiera juicios sintéticos a priori; que éstos aparezcan sólo en la geometría o también en la aritmética es una cuestión de menor importancia.

90. No tengo la pretensión de haber hecho más que verosímil la naturaleza analítica de los enunciados aritméticos, porque siempre puede seguirse dudando de si su prueba puede llevarse a cabo enteramente a partir de leyes puramente lógicas, de si no se infiltrará en algún lugar de la prueba un fundamento de otro tipo. Esta objeción no resulta totalmente desvirtuada por las indicaciones que he dado para la demostración de algunos enunciados; la objeción sólo puede ser eliminada mediante una deducción completamente formal, de modo que no haya ningún paso que no se dé conforme a alguna de las reglas de inferencia reconocidas como puramente lógicas. Así, no se ha llevado a cabo hasta ahora casi ninguna prueba, porque el matemático se contenta con que cada transición a un nuevo juicio aparezca como evidentemente correcta, sin preguntarse por la naturaleza de esta evidencia, sin averiguar si es lógica o intuitiva. Un paso de éstos es frecuentemente muy complejo y equivalente a varias inferencias simples, junto a las cuales puede intervenir algo procedente de la intuición. Se procede a saltos, y de ahí surge la multipli-

cidad, aparentemente abundante, de modos de inferencia en la matemática; pues cuanto mayores son los saltos, tanto más variadas son las combinaciones de inferencias simples y axiomas de la intuición que los pueden representar. No obstante, es frecuente que uno de estos pasos se nos aparezca como evidentemente inmediato, sin que seamos conscientes de los pasos intermedios, y dado que no se presenta como una de las reglas de inferencia lógica admitidas, estamos dispuestos a considerar que esta evidencia es intuitiva y que la verdad descubierta es sintética, incluso cuando es manifiesto que el dominio de su validez alcanza mucho más de lo que es intuitivo.

Por esta vía no es posible deslindar tajantemente lo sintético, que se basa en la intuición, de lo analítico. Tampoco se consigue así reunir con certeza un conjunto completo de axiomas de la intuición, de modo que toda prueba matemática pudiese ser realizada únicamente a partir de estos axiomas, según las leyes lógicas.

91. Es ineludible, pues, la exigencia de evitar todo salto en la deducción. Que resulte tan difícil satisfacer esta exigencia proviene de lo penoso que es proceder paso a paso. Toda prueba solamente algo complicada amenaza con adquirir una extensión enorme. A ello se añade que la excesiva variedad de formas lógicas acuñadas en el lenguaje dificulta la delimitación de un conjunto de reglas de inferencia que sea suficiente para todos los casos y que sea fácil de examinar.

Para minimizar estos inconvenientes he inventado mi ideografía *(Begriffschrift)*. Está destinada a permitir una mayor brevedad y claridad en la expresión y a proceder según unas pocas formas fijas, como en un cálculo, de modo que no se permite ningún paso que no sea conforme a las reglas establecidas de una vez por todas.[7] Ningún fundamento de la prueba puede introducirse, entonces, sin someterlo a estrecha vigilancia. De esta manera, sin pedir prestado a la intuición ningún axioma, he demostrado un enunciado,[8] que a primera vista podría parecer sintético, y al que aquí voy a expresar así:

Cuando la relación de cada término de una serie con su inmediatamente siguiente es unívoca,[9] y si $m$ e $y$ siguen a $x$ en esta serie, entonces $y$ precede a $m$ en esta serie, o coincide con $m$ o sigue a $m$.

Por esta prueba se echa de ver que enunciados que extienden nuestros conocimientos pueden contener juicios analíticos.[9 bis]

[7] Sin embargo, no sólo debe ser capaz de expresar la forma lógica, como la notación booleana, sino también el contenido.

[8] *Begriffschrift*, Halle a/S., 1879, p. 86, Fórmula 133.

[9] Frege quiere decir «unívoca *por la derecha*», es decir, si la relación «inmediatamente siguiente a» es una función. *(N. del T.)*



## Otros números

92. Hasta aquí hemos limitado nuestro estudio a los números naturales. Echemos una mirada ahora a otras especies de números y tratemos de hacer aplicable a este campo más amplio lo que hemos aprendido en el más estrecho.

Para aclarar el sentido de la cuestión de la posibilidad de un cierto número, dice Hankel:[10]

«Hoy día el número no es ya una cosa, una sustancia, que existe independientemente fuera del sujeto pensante y de los objetos que lo han inducido, un principio autónomo, como lo era, por ejemplo, para los pitagóricos. La pregunta por su existencia, por consiguiente, sólo puede ser referida al sujeto pensante o a los objetos pensados, cuyas relaciones representan los números. En rigor, para el matemático sólo es imposible lo que es lógicamente imposible, es decir, lo que es contradictorio consigo mismo. Que, en este sentido, no puedan ser admitidos números imposibles, no requiere ninguna prueba. Pero si los números en cuestión son lógicamente posibles, su concepto claro y bien definido y, por tanto, sin contradicción, entonces la antedicha pregunta sólo puede consistir en saber si en el dominio de lo real, de lo dado en la intuición, de lo actual, hay un substrato de los números, de si hay objetos en los que aparecen los números, o sea, las relaciones intelectuales del tipo definido.»

93. Ante la primera frase, puede dudarse de si, según Hankel, los números existen en el sujeto pensante o en los objetos que los inducen o en ambos. En sentido espacial, en

[9 bis] Se encontrará que esta prueba es aún demasiado larga, desventaja que quizá parezca pesar más que la certeza casi incondicionada ante un error o un hueco. Mi objetivo, por aquel entonces, era reducir todo al número más pequeño posible de leyes lógicas lo más simples posible. En consecuencia, empleé una sola regla de inferencia. Pero ya entonces indiqué en el prólogo, p. VII, que para la aplicación ulterior sería aconsejable admitir más reglas de inferencia. Esto puede hacerse sin perjuicio de la trabazón de las deducciones, y con ello se consigue una brevedad significativamente mayor.

[10] *Op. cit.*, p. 6 y 7.

todo caso, no están ni dentro ni fuera, ni en el sujeto ni en un objeto. Pero ciertamente están fuera del sujeto en el sentido de que no son subjetivos. Mientras que cada uno puede sentir solamente su dolor, su deseo, su hambre, o tener sus sensaciones de sonido o de color, los números, por el contrario, pueden ser objetos comunes para muchos, y sin duda son exactamente los mismos para todos, y no sólo estados más o menos semejantes de diferentes personas. Cuando Hankel pone en relación la pregunta por la existencia del número con el sujeto pensante, parece que haga de ella una cuestión psicológica, aunque no lo es. La matemática no se ocupa de la naturaleza de nuestra alma, y para ella debe ser totalmente indiferente cuál sea la respuesta que se dé a cualesquiera preguntas psicológicas.

94. También hay que replicar a la afirmación de que el matemático considera imposible sólo lo que se contradice a sí mismo. Un concepto es admisible incluso si sus características contienen una contradicción; solamente que no hay que suponer que algo caiga bajo él. Pero del hecho de que el concepto no contenga ninguna contradicción todavía no puede inferirse que algo caiga bajo él. Por lo demás, ¿cómo podría demostrarse que un concepto no contiene ninguna contradicción? Esto no es siempre patente; del hecho de que no se vea ninguna contradicción no se sigue que no exista ninguna, y la precisión de su definición no es ninguna garantía de ello. Hankel demuestra [11] que un sistema de números complejos cerrado, de orden superior al ordinario, que estuviera sometido a todas las leyes de la adición y la multiplicación, contiene una contradicción. Pero justamente esto hay que demostrarlo; no se ve inmediatamente. Antes de demostrarlo, podría ser que alguien, utilizando un sistema de números semejante, hubiera llegado a resultados maravillosos, cuya fundamentación no sería peor que la que da Hankel [12] de la teoría de determinantes mediante los números alternantes; porque, ¿quién nos garantiza que sus conceptos no incluyen también alguna contradicción oculta? E incluso si una tal contradicción quedara excluida, en general para un número cualquiera de unidades alternantes, todavía no se seguiría que tales unidades existen. Y esto es precisamente lo que necesitamos. Tomemos como ejemplo el teorema 18 del libro I de los *Elementos*, de Euclides:

[11] *Op. cit.*, pp. 106 y 107.
[12] *Op. cit.*, 35.



En cualquier triángulo, al lado mayor se opone el ángulo mayor.

Para demostrar esto, Euclides quita al lado mayor AC un segmento AD igual al lado menor AB, basándose para ello en una construcción anterior. La prueba se desmoronaría si no existiese el punto D, y no es suficiente que no se descubra ninguna contradicción en el concepto «punto sobre AC, cuya distancia de A es igual a la de B». Se une B con D. También que haya una recta tal es un enunciado en el que se apoya la prueba.

95. En rigor, la no contradictoriedad de un concepto sólo puede establecerse, sin duda, mostrando que algo cae bajo él. Lo inverso sería un error. En este error cae Hankel cuando, en relación con la ecuación $x+b=c$, dice: [13]

«Es evidente que, para $b>c$, no hay ningún número en la serie 1, 2, 3, ..., que nos dé la solución del problema: la sustracción es entonces *imposible*. Pero nada nos impide *considerar* en este caso la diferencia (c—b) como un signo, que da la solución del problema y con el cual se puede operar exactamente como si fuera un signo numérico de la serie 1, 2, 3, ...»

Pero el caso es que sí hay algo que nos impide considerar (2—3) sin más como signo que resuelve el problema; pues un signo vacío no resuelve ningún problema; sin un contenido sólo es tinta o una mancha impresa sobre papel, y como tal tiene propiedades físicas, pero no la de dar 2 al sumársele 3. En realidad, no sería un signo en absoluto, y emplearlo como tal sería un error lógico. Incluso en el caso en que $c>b$ no es el signo (c—b) la solución del problema, sino su contenido.

96. Con el mismo derecho podríamos decir: entre los números hasta ahora conocidos, no hay ninguno que satisfaga a la vez las dos ecuaciones

$$x+1=2 \quad \text{y} \quad x+2=1;$$

pero nada nos impide introducir un signo que resuelva el problema. Se dirá: ¡pero es que en el problema está contenida una contradicción! Naturalmente, si como solución se exige un número real o complejo ordinario; pero ampliemos nuestro sistema numérico, creemos números que satisfagan estos requisitos. ¿Quién puede saber lo que es posible con estos nuevos números? Desde luego, no podremos mantener enton-

[13] *Op. cit.*, p. 5. Análogamente, E. Kossak: *Op. cit.*, p. 17, al final.

ces la univocidad de la sustracción; pero también hemos de abandonar la univocidad de la operación de sacar raíz, si introducimos los números negativos; con los números complejos la logaritmización se hace multívoca.

¿Crearemos también números que nos permitan sumar series divergentes? ¡No! Tampoco el matemático puede crear cualquier cosa, no más que el geógrafo; también él sólo puede descubrir lo que está ahí y darle un nombre.

De este error sufre la teoría formalista de los quebrados, de los números negativos y de los complejos.[14] Se exige que las reglas de cálculo conocidas sigan siendo válidas, en la medida de lo posible, para los nuevos números a introducir, y de ello se deducen propiedades y relaciones generales. Si en ninguna parte se choca con una contradicción, se considera justificada la introducción de los nuevos números, como si, a pesar de todo, no pudiera estar escondida alguna contradicción por algún sitio, y como si no contradictoriedad fuera ya existencia.

97. Que esta falta se cometa tan fácilmente proviene, sin duda, de no distinguir correctamente los conceptos de los objetos. Nada nos impide utilizar el concepto «raíz cuadrada de —1»; pero no estamos justificados sin más a poner delante el artículo determinado y considerar que la expresión «la raíz cuadrada de —1» es plena de sentido. Bajo la suposición previa de que $i^2 = -1$, podemos demostrar la fórmula que da el seno de un múltiplo del ángulo *a* en función del seno y el coseno de *a;* pero no debemos olvidar que el enunciado lleva consigo la condición de que $i^2 = -1$, de lo que no podemos prescindir sin más. Si no hubiera nada cuyo cuadrado fuera —1, nuestra demostración no conseguiría sin más que la ecuación fuese correcta,[15] porque la condición $i^2 = -1$ no se cumpliría nunca y de ella depende su validez. Es como si en una prueba geométrica hubiésemos hecho uso de una línea auxiliar que no pudiera trazarse.

98. Hankel[16] introduce dos tipos de operaciones, que él llama lítica y thética, y que define por medio de determinadas propiedades que han de tener estas operaciones. Nada puede objetarse a esto, hasta tanto no se presuponga que existen estas operaciones y los objetos que pueden ser sus resulta-

[14] Análogamente ocurre con los números infinitos de Cantor.

[15] Por otro camino, no obstante, podría ser demostrada rigurosamente.

[16] *Op. cit.*, p. 18.



dos.[17] Posteriormente[18] designa una operación thética, totalmente unívoca y asociativa, por (a+b) y la operación lítica correspondiente, asimismo totalmente unívoca, por (a—b). ¿*Una* operación que...? ¿Qué operación? ¿Una cualquiera? Entonces no es esto ninguna definición de (a+b). ¿Y si no hay ninguna? Si la palabra «adición» no tuviera todavía ningún significado, sería lógicamente admisible decir: una tal operación la llamaremos una adición; pero no se puede decir: una tal operación ha de ser *la* adición y será designada por (a+b) antes de haber establecido que hay una y sólo una. No se puede utilizar el artículo indeterminado a un lado de una igualdad definicional, y al otro el artículo determinado. Luego dice Hankel sin más: «El módulo de la operación», sin haber demostrado que hay uno y sólo uno.

99. En una palabra, esta teoría puramente formal es insuficiente. Lo que hay de valor en ella es sólo esto. Se demuestra que cuando las operaciones tienen ciertas propiedades como la asociatividad y la conmutatividad, son válidos para ellas determinados enunciados. Se prueba que la adición y la multiplicación, que ya se conocen, tienen estas propiedades y se les puede aplicar inmediatamente esos enunciados, sin repetir la prueba detalladamente en cada caso particular. Sólo mediante esta aplicación de operaciones dadas ulteriormente se llega a los teoremas familiares de la aritmética. Pero no se debe creer en ningún caso que por este procedimiento se puedan introducir la adición y la multiplicación. Se da sólo una instrucción sobre cómo deberán ser las definiciones, pero no éstas mismas. Se dice: el nombre «adición» ha de darse únicamente a una operación thética, totalmente unívoca, asociativa, con lo cual todavía no se ha indicado cuál es la operación que ha de ser llamada así. Según esto, nada nos podría impedir denominar adición a la multiplicación y designarla por (a+b), y nadie podría decir con certeza si 2+3 son 5 ó 6.

100. Si abandonamos este tratamiento puramente formal, entonces parece que se nos ofrece un camino, gracias a la circunstancia de que junto con la introducción de nuevos números, se amplía el significado de los términos «suma» y «producto». Se toma un objeto, por ejemplo, la Luna, y se define: la Luna multiplicada por sí misma es —1. Entonces tenemos con la Luna una raíz cuadrada de —1. Esta defini-

[17] En realidad, esta presuposición la hace Hankel ya al utilizar la ecuación $\theta(c, b) = a$.

[18] *Op. cit.*, p. 29.

ción parece lícita porque por el significado atribuido hasta aquí a la multiplicación aún no se desprende nada en cuanto al sentido de un producto tal y, por lo tanto, éste puede ser establecido arbitrariamente como ampliación de aquel significado. Pero también necesitamos el producto de un número real con la raíz cuadrada de —1. Es mejor que escojamos entonces el intervalo temporal de un segundo como raíz cuadrada de —1; designémoslo por *i*. Entonces, por $3i$ entenderemos el intervalo de 3 segundos, etc.[19] ¿Cuál será el objeto designado entonces por $2+3i$, pongamos por caso? ¿Qué significado habría que dar en este caso al signo más? Bien, esto deberá ser fijado de una forma general, lo cual, naturalmente, no será fácil. Pero admitamos que hubiésemos asegurado un sentido a todos los signos de la forma $a+bi$, y un sentido tal, que valiesen las leyes de la adición conocidas. Habríamos de estipular además qué valor ha de tener, en general

$$(a+bi)\ (c+di)=ac—bd+i\ (ad+bc),$$

con lo cual extenderíamos más la multiplicación.

101. Ahora bien, podríamos probar la fórmula de cos ($n\ \alpha$), si supiésemos que de la igualdad de números complejos se sigue la igualdad de sus partes reales. Esto debería desprenderse del sentido de $a+bi$, que aquí hemos admitido que existe. La prueba sólo valdría para el sentido de los números complejos, de sus sumas y productos, sentido que hemos fijado nosotros. Ahora bien, dado que para un número real entero $n$ y para un número real $\alpha$, $i$ no aparece ya en la ecuación, nos vemos tentados a concluir: luego, es totalmente indiferente que $i$ se refiera a un segundo, a un milímetro o a cualquier otra cosa, con tal de que valgan simplemente nuestras leyes de la adición y de la multiplicación; se trata de éstas, únicamente; no tenemos por qué preocuparnos de lo demás. Ciertamente, quizá puede fijarse de diversos modos el significado de $a+bi$, de suma y producto, de manera que sigan siendo válidas esas leyes; pero no es indiferente que se pueda o no encontrar un sentido tal para estas expresiones.

[19] Con la misma justificación podríamos escoger también un cierto cuanto de electricidad, o una cierta área, etc., como raíces cuadradas de —1, aunque naturalmente deberíamos designar diferentemente estas distintas raíces. Que de esta manera se puedan crear aparentemente tantas raíces cuadradas de —1 como se quiera, no es de extrañar, si se tiene en cuenta que el significado de la raíz cuadrada no había sido fijado ya antes de esas estipulaciones, sino que sólo se determina junto con ellas.



102. Frecuentemente se hace como si la mera estipulación fuera ya su propio cumplimiento. Se estipula que la sustracción,[20] la división, la radicación sean siempre realizables, y con ello se cree haber hecho ya bastante. ¿Por qué no se estipula también que por tres puntos cualesquiera se puede trazar una línea recta? ¿Por qué no se estipula que en un sistema de números complejos tridimensional valgan las mismas leyes de la adición y de la multiplicación que en un sistema de números reales? Porque estas estipulaciones contienen una contradicción. ¡Demuéstrese entonces primero que aquellas otras estipulaciones no contienen ninguna contradicción! Hasta tanto no se haya hecho esto, todos los esfuerzos por ser rigurosos no son más que vanas ilusiones.

En un teorema geométrico no se hace mención de la línea auxiliar, que a lo mejor se ha utilizado para la prueba. Quizá son posibles varias, por ejemplo, cuando se puede escoger arbitrariamente un punto. Pero por mucho que podamos prescindir de cada línea auxiliar en particular, no obstante, la fuerza de la prueba depende de que se pueda trazar una línea de las características exigidas. Del mismo modo, tampoco en nuestro caso es indiferente para la fuerza de la prueba que se pueda dar un sentido a «$a+bi$», o bien que sea una mera mancha impresa. Para ello no basta estipular que deba tener un sentido o decir que el sentido es la suma de $a$ y $bi$, si antes no se ha explicado a qué se refiere «suma» en este caso, y si no se ha justificado el uso del artículo determinado.

103. Naturalmente, podrán hacerse algunas objeciones a nuestro intento de fijar el sentido de «*i*». Introducimos así algo totalmente ajeno, el tiempo, en la aritmética. El segundo no está en ninguna relación interna con los números reales. Los teoremas que se prueban con ayuda de los números complejos serían juicios a posteriori, o, por lo menos, sintéticos, si no fuera posible otro tipo de demostración, o si no se pudiera hallar ningún otro sentido para *i*. En todo caso, primero hay que hacer el intento de mostrar que todos los enunciados de la aritmética son analíticos.

Cuando Kossak[21] refiriéndose al número complejo, dice: «Es una imagen compuesta de grupos heterogéneos de elementos idénticos entre sí»,[22] parece haber evitado con ello la

[20] Véase Kossak: *Op. cit.*, p. 17.

[21] *Op. cit.*, p. 17.

[22] Compárese esta expresión de «imagen» con lo dicho en el párrafo 27, la de «grupo» con lo dicho en el 23 y en el 25 en relación con «agregado»; sobre la identidad de elementos, véase los párrafos 34-39.

injerencia de algo ajeno; pero esto es sólo una apariencia debida a la vaguedad de la expresión. No se obtiene ninguna respuesta sobre qué significa realmente $1+i$: ¿la imagen de una manzana y una pera o del dolor de muelas y la podagra? No puede referirse a ambas cosas a la vez, pues entonces $1+i$ no sería siempre igual a $1+i$. Se dirá: esto depende de la estipulación particular que hagamos. Pero entonces tampoco tenemos en el enunciado de Kossak ninguna definición del número complejo, sino sólo una instrucción general para establecerla. Pero necesitamos algo más; debemos saber exactamente lo que «*i*» significa, y si quisiéramos decir, siguiendo aquella instrucción: la imagen de una pera, volveríamos a introducir algo ajeno a la aritmética.

Lo que se acostumbra a denominar la representación geométrica de los números complejos tiene, por lo menos, la ventaja de que así 1 e *i* no aparecen totalmente sin conexión y heterogéneamente, sino que el segmento que se toma como representación de *i* se halla en una conexión regular con el segmento que representa 1. Por lo demás, en sentido estricto, no es correcto decir que 1 se refiere así a un segmento determinado e *i* a otro de la misma longitud, perpendicular al primero, pues «1» se refiere, en todas partes, a lo mismo. Un número complejo, en esta interpretación, indica de qué manera el segmento que se toma como su representación, se construye a partir de un segmento dado (segmento unidad) por multiplicación, división y giro.[23] Pero también, según esta interpretación, aparece cada teorema, cuya prueba deba basarse en la existencia de un número complejo, como dependiente de la intuición geométrica y, por tanto, como sintético.

104. ¿De qué manera nos han de venir dadas las fracciones, los números irracionales y los números complejos? Si pedimos auxilio a la intuición, introducimos en la aritmética algo que le es ajeno; pero si sólo determinamos el concepto de tales números mediante ciertas características, si sólo exigimos que el número tenga ciertas propiedades, entonces nada nos garantiza que algún objeto caiga bajo el concepto y corresponda a nuestros requisitos, y, sin embargo, es esto precisamente en lo que deben basarse las pruebas.

Y bien, ¿qué ocurre con el número natural? ¿Es cierto que no nos está permitido hablar de 1 000 ($1000^{1000}$) hasta tanto no nos venga dado en la intuición ese número de objetos? ¿Es,

[23] Para simplificar, prescindo aquí de los inconmensurables.



mientras tanto, un signo vacío? Evidentemente, no. Tiene un sentido totalmente preciso, si bien nos es psicológicamente imposible, ya sólo sea por la brevedad de nuestra vida, hacernos conscientes de semejante número de objetos[24] pero, a pesar de ello, 1 000 ($1000^{1000}$) es un objeto, cuyas propiedades nosotros podemos conocer, aunque no sea intuitivo. De ello se convence uno al mostrar, introduciendo el signo $a^n$ para la potencia, que con este signo siempre se expresa un número entero positivo y sólo uno, si $a$ y $n$ son números enteros positivos. Nos llevaría demasiado lejos exponer aquí con detalle cómo puede mostrarse esto. El modo como hemos definido en el párrafo 74 el cero, en el 77 el uno, y en el 84 el número infinito $\infty_1$, y la indicación general de la prueba de que a cada número finito en la serie de los números naturales le sigue inmediatamente otro número (párrafos 82 y 83), darán una idea general del camino a seguir.

Asimismo, en el caso de la definición de las fracciones, de los números complejos, etc., todo dependerá, en último término, del hallazgo de un contenido de juicio que pueda transformarse en una ecuación cuyos miembros sean precisamente los nuevos números. Con otras palabras: debemos fijar el sentido de un juicio de reconocimiento de tales números. En esto hay que tener en cuenta las objeciones que hemos discutido (párrafos 63-68) con respecto a semejante transformación. Si procedemos igual que allí, los nuevos números nos vendrán dados como extensiones de conceptos.

105. Con esta concepción de los números,[25] creo que se explica fácilmente el atractivo que ejerce el estudio de la aritmética y del análisis. Parafraseando una sentencia famosa, podríamos decir: el objeto propio de la razón es la razón. En la aritmética nos ocupamos de objetos que no nos vienen dados desde fuera, como algo extraño, gracias a la mediación de los sentidos, sino que son dados directamente a la razón, la cual los puede contemplar como lo más propio de sí misma.[26]

[24] Un simple cálculo mostraría que no serían suficientes millones de años.

[25] También se la podría llamar formalista. No obstante, es totalmente distinta de la concepción examinada antes bajo esta denominación.

[26] Con esto no pretendo negar que sin las impresiones sensibles seríamos estúpidos como un madero y no sabríamos nada, ni de números ni de cualquier otra cosa. Vuelvo a hacer hincapié en este punto, debido al peligro constante que hay de mezclar dos cuestiones radicalmente distintas.

Y con todo, o mejor dicho, precisamente por esto, no son estos objetos fantasías subjetivas. No hay nada más objetivo que la leyes aritméticas.

106. Echemos una breve mirada final al curso de nuestra investigación. Después de haber establecido que el número no es ni un montón de cosas ni una propiedad de un tal montón, pero que tampoco es un producto subjetivo de procesos mentales, sino que la asignación de número de un concepto expresa algo objetivo, intentamos primero definir cada uno de los números 0, 1, etc., y la sucesión en la serie de los números. El primer intento fracasó porque sólo habíamos definido lo que se predica de un concepto, pero no habíamos dado definiciones por separado del 0 y del 1, que sólo son partes de esa predicación. Esto tuvo como consecuencia que no podíamos demostrar la igualdad de números. Se puso de manifiesto que el número del que se ocupa la aritmética no debe ser concebido como un atributo sin autonomía, sino sustantivamente.[27] El número aparecía así como objeto reconocible, si bien no como un objeto físico, o siquiera espacial, ni tampoco como objeto del que pudiéramos formarnos una representación gracias a nuestra imaginación. A continuación establecimos el principio de que el significado de una palabra no debe ser definido aisladamente, sino en el contexto de un enunciado; sólo siguiendo este principio, puede evitarse, según creo, la concepción física del número, sin caer por ello en la psicológica. Ahora bien, para cada objeto hay un tipo de enunciados que deben tener un sentido respecto de ese objeto; éstos son los enunciados de reconocimiento del objeto, y en el caso de los números se llaman ecuaciones. También la asignación de número debe concebirse, como vimos, como una ecuación. Se trataba, pues, de fijar el sentido de una ecuación numérica, de expresarlo sin hacer uso de los numerales ni de la palabra «número». Vimos que el contenido de un juicio de reconocimiento de números consistía en la posibilidad de aplicar biyectivamente a los objetos que caen bajo un concepto *F* los objetos que caen bajo un concepto *G*. Nuestra definición, pues, debía establecer esta posibilidad como equivalente a una ecuación numérica. Recordamos casos parecidos: la definición de la dirección partiendo del paralelismo, de la forma partiendo de la semejanza, etc.

[27] La diferencia corresponde a la que hay entre «azul» y «el color del cielo».



107. Se planteó entonces la cuestión: ¿cuándo se está justificado a considerar un contenido como el contenido de un juicio de reconocimiento? Para ello debe cumplirse la condición de que, en todo juicio, pueda sustituirse, sin perjuicio de la verdad, el miembro de la izquierda de la ecuación aceptada para hacer la prueba por el miembro de la derecha. Ahora bien, hasta tanto no añadamos nuevas definiciones, de momento no disponemos de ninguna aseveración más sobre el miembro izquierdo o derecho de una ecuación tal, aparte de la expresada por esa misma ecuación. Sólo era preciso demostrar, pues, la posibilidad de sustitución en una ecuación.

Pero subsistía aún una duda. Un enunciado de reconocimiento debe tener siempre un sentido. Si consideramos como una ecuación la posibilidad de aplicar biyectivamente a los objetos que caen bajo el concepto *F* los objetos que caen bajo el concepto *G*, diciendo en vez de ello: «el número que corresponde al concepto *F* es igual al número que corresponde al concepto *G*» e introduciendo así la expresión «el número que corresponde al concepto *F*», entonces tendremos un sentido para la ecuación únicamente cuando ambos miembros tengan la forma que acabamos de indicar. Según una definición semejante, no podríamos juzgar si una ecuación es verdadera o falsa cuando solamente un miembro tiene esta forma. Esto nos indujo a dar la definición:

El número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto «concepto equinumérico al concepto *F*», en que el concepto *F* se dice que es equinumérico al concepto *G* cuando existe la antedicha posibilidad de establecer una aplicación biyectiva.

En todo esto suponemos conocido el sentido de la expresión «extensión de un concepto». Este modo de superar la dificultad no será aprobado, sin duda, por todo el mundo, y algunos preferirán otros modos de eliminar la duda del principio. Tampoco doy una importancia decisiva a la utilización de la extensión de un concepto.

108. Sólo quedaba por definir la aplicación biyectiva; la redujimos a relaciones puramente lógicas. Después de ello, indicamos primero la marcha de la prueba del enunciado: el número que corresponde al concepto *F* es igual al que corresponde al concepto *G*, si el concepto *F* es equinumérico al concepto *G*; a continuación definimos el 0, la expresión «*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales» y el número 1, y mostramos que 1 sigue inmediatamente al 0 en la serie de los números naturales. Indicamos algunos

teoremas que son fáciles de demostrar en este punto, y pasamos luego a considerar más atentamente el siguiente teorema, que permite conocer la infinitud de la serie de los números:

A cada número le sigue un número en la serie de los números naturales.

Esto nos llevó al concepto «perteneciente a la serie de los números naturales que acaba con *n*», respecto del cual queríamos mostrar que el número que le corresponde sigue inmediatamente a *n* en la serie de los números naturales. Ante todo lo definimos mediante la noción de suceder un objeto *y* a un objeto *x* en una serie-∅ general. También el sentido de esta expresión fue reducido a relaciones puramente lógicas. Y, a través de esto, conseguimos probar que la inferencia de *n* a $(n+1)$, que usualmente se considera una inferencia peculiar de la matemática, se basa en las inferencias lógicas generales.

Para la prueba de la infinitud de la serie de los números necesitábamos el enunciado de que ningún número finito de la serie de los números naturales se sigue a sí mismo. Así llegamos a los conceptos de número finito y de número infinito. Mostramos que este último, en lo fundamental, no está menos justificado lógicamente que el primero. Como comparación, se hizo referencia a los números infinitos de Cantor y su «seguir en una sucesión», haciéndose notar las divergencias de terminología.

109. De todo lo anterior resultó la gran verosimilitud de la naturaleza analítica y a priori de las verdades aritméticas; y alcanzamos un perfeccionamiento de la idea de Kant. Hemos visto, además, lo que aún falta para elevar esa verosimilitud a la categoría de certeza, y hemos indicado el camino que ha de conducir a ello.

Al final hemos utilizado nuestros resultados para hacer una crítica de la teoría formalista de los números negativos, quebrados, irracionales y complejos, con lo cual quedó patente la insuficiencia de esta teoría. Vimos sus errores ya que admitía como demostrada la no contradictoriedad de un concepto cuando no se había señalado ninguna contradicción, y puesto que tomaba la no contradictoriedad de un concepto como garantía suficiente de su no vaciedad. Esta teoría se figura que le basta con hacer estipulaciones; que la satisfacción de éstas se da por sí misma. Se comporta como un dios que con su pura palabra puede crear lo que necesita. Debería ser censurada también al hacer pasar por definición lo que



sólo es una instrucción para una ulterior definición; instrucción que, si se sigue, introduce en la aritmética algo que le es ajeno, si bien en su expresión literal aparece libre de ello, pero sólo porque sigue siendo una mera instrucción.

Por ello, esta teoría formalista está en peligro de recaer en lo a posteriori o sintético, por mucho que dé la impresión de moverse en la cima de las abstracciones.

Nuestro tratamiento anterior de los números enteros positivos nos ha mostrado la posibilidad de evitar la injerencia de cosas exteriores y de intuiciones geométricas, sin caer, por ello, en los errores de la teoría formalista. En este caso, lo mismo que antes, se trata de fijar el contenido de un juicio de reconocimiento. Si suponemos satisfecho este requisito en todas partes, entonces ya no son los números negativos, quebrados, irracionales y complejos más misteriosos que los números enteros positivos, y éstos no son más reales, actuales o palpables que aquéllos.

# SEGUNDA PARTE

*Claude Imbert*

Estudio de los Fundamentos de la Aritmética de Frege

Capítulo primero

# Observación previa para un lector matemático

La traducción de los *Fundamentos de la aritmética* proporciona al lector, si es matemático, un documento histórico, y si es filósofo o lógico, el análisis ejemplar de un problema discutido desde la Antigüedad y resuelto aquí por primera vez.

El matemático Frege pertenece al linaje de Gauss, a quien cita frecuentemente; es uno de aquellos que han querido «sustituir el cálculo por las ideas», el 1+1 de los libros escolares por la definición de número cardinal. La lección matemática de Frege, medida por su resultado, que hoy se alcanza por un camino trillado durante casi veinte lustros, se puede dar ahora rápidamente. Ciertamente, Bourbaki la resume de forma adecuada en unas pocas líneas.

Pero al igual que aquel que partió para las Indias y descubrió América, Frege buscaba el número e inventó un lenguaje que le puso a la cabeza de los matemáticos. El laborioso aritmético que arrojaba al cesto borrador tras borrador, creó, si es que se puede decir esto de alguien, la llamada lógica moderna. La introducción que presentamos aquí pretende seguir el rastro de esta intención en su curso singular. Se muestra en ella cómo la vieja lógica tuvo que quitarse la librea y la servidumbre de las lenguas naturales, y cómo el análisis introdujo, debido a la naturaleza misma del asunto, los principios extensionales. Tal como sucede en los casos de verdaderos descubrimientos, Frege quedó sorprendido él mismo y no fue capaz de resolver todas las objeciones; citemos solamente la polémica de que fue objeto con respecto a la distinción entre el objeto y el concepto.[1] Tres veces, o cuatro, puso manos a la obra en su ideografía,[2] sin lograr evitar, no obstante, caer en algunos embrollos.

[1] Véase más abajo, pp. 161, 220 y párrafo 97 de los *Fundamentos* y el artículo *Concepto y objeto*.

[2] Así suele traducirse la *Begriffschrift* de Frege, es decir, el lenguaje simbólico inventado por éste y publicado en 1879. *(N. del T.)*

Frege creó a la vez —como se verá— la *cuantificación* y la precaria doctrina de las *extensiones de concepto,* siendo juzgadas ambas como nociones de razón pura. Una y otra emanan de una teoría del concepto directamente opuesta a la filosofía de Kant y cuyo sentido estriba en imponer un principio de determinación de los conceptos *(Begriffbestimmung)* análogo al de la matemática efectiva. Se diría también que se trataba, en realidad, de dar a la lógica lo que le correspondía. La historia ha conservado el primer descubrimiento y ha rechazado el segundo: en vez de éste, la *teoría de conjuntos* enumera, mediante axiomas, las propiedades específicas de la relación de pertenencia, empleando para ello, provechosa y cómodamente, los recursos de la cuantificación. Este nuevo reparto entre lógica y álgebra, que otorga a esta última, es decir, a una ciencia de las estructuras singulares, lo que Frege había dado a la lógica en un avance impetuoso, nos ha permitido también, por lo que hace a nosotros, desenredar el embrollo.

Frege identificó la lógica y la totalidad de los enunciados de razón pura en virtud de un doble criterio: es lógico lo que es pensado o construido fuera de toda intuición; es lógico lo que es general hasta el punto de pertenecer a todo lenguaje y lo que es de tal naturaleza que no se podría concebir un lenguaje que careciera de ello.

El primer criterio, de hecho, es impotente para distinguir la lógica del álgebra, y las diferentes álgebras entre sí. De ahí las generalizaciones abusivas de Frege, la confusión de lo que Wittgenstein denomina los dos espacios lógicos:[3] el álgebra de Boole y el álgebra de funciones o álgebra elemental.

El segundo criterio no permite oponer las lenguas naturales a las lenguas extensionales, suponiendo, por el contrario, su compatibilidad. De ahí el carácter de este libro, verdadero *ápax* de la literatura científica, investigación aritmética escrita aparentemente en la lengua común, pero no sin violentar su uso corriente. Para responder a la cuestión inicial: ¿qué es, pues, *el* número 1? Frege identifica un procedimiento típico del álgebra, a saber: la construcción de un conjunto cociente inducido por una relación de equivalencia, y un cierto uso de la nominalización en las lenguas vernáculas. Erige así en *ley fundamental* un procedimiento particular del álgebra y

[3] Véase G. Granger: *Le problème de l'espace logique dans le Tractatus,* «L'Age de la Science», 1968, y nuestra comunicación: *L'Héritage frégéen du Tractatus,* «Revue internationale de philosophie», 1970.



sometido a condiciones. De aquí resulta la culpable ley V y la antinomia.[4] Al delimitar mal el campo de su descubrimiento, Frege, como precursor que era, se dejó engañar por el espejismo de la razón pura en las aguas turbulentas de la lengua común.

No se detenga el matemático ante estos errores primerizos y vaya derecho al texto de los *Fundamentos.* Se recordará, no obstante, que Frege halló la extensión de concepto, o el conjunto, en la encrucijada de una idea: la interpretación extensional del concepto (predicado), y de una investigación: la del número cardinal. Por la misma época, Dedekind construía, por su parte, dos nociones primitivas, la de *sistema* y la de *aplicación;* ahora bien, toda la gracia de los *sistemas* es dar materia a la definición de las *aplicaciones* (luego estructuras). A pesar de su fracaso, hay que admitir que el método de Frege es elegante y no sin parentesco con la *axiomatización de la teoría de conjuntos* de Von Neumann (1925).[5]

La construcción del número cardinal sería realmente defectuosa si Frege tratase de inducir un conjunto cociente en el conjunto de todos los conjuntos: pero hay que hacer notar que tal noción no tiene traducción alguna en la escritura conceptual. A la crítica de Bourbaki, respondemos, por otra parte, que Frege utiliza, sin que aparezca el término mismo, la noción de representante de una clase de equivalencia, de manera que una clase tal pueda ser definida sin que vengan dados todos sus elementos. La clase de los conceptos equinuméricos a un concepto dado no es otra cosa, en definitiva, que el dominio de una determinada relación de equivalencia; los conceptos equinuméricos mismos son funciones características, y Frege utiliza a lo sumo un conjunto de funciones determinadas; esto no es el conjunto universal. Finalmente, las prescripciones que pesan sobre el *concepto unidad* eliminan por adelantado, en algún sentido, los conceptos cuya extensión es incierta y, en el caso particular del número cardinal, permiten la construcción efectuada aquí.

[4] Véase más abajo, pp. 136 y 202.

[5] «... A pesar de todo, nosotros preferimos axiomatizar la "función" antes que el "conjunto". La primera noción incluye la segunda .(Más exactamente, las dos nociones son equivalentes, puesto que una función puede ser tratada como un conjunto de pares y un conjunto como una función que puede tomar dos valores.) La razón por la cual no emprendo el camino usual es que toda axiomatización de la teoría de conjuntos utiliza la noción de función y que, desde un punto de vista formal, es más simple basar la noción de conjunto en la de función, que proceder a la inversa...». *A Source book in mathematical Logic,* p. 396.

Dejando aparte algunas referencias juzgadas indispensables, nuestra introducción deja en la sombra la historia de las matemáticas. Tampoco pertenece a la epistemología de esta ciencia, ya que «no es posible ninguna epistemología matemática que no esté instalada dentro de la matemática misma».[6] A lo sumo se ha querido lanzar una «primera ojeada»[7] a este texto en el que se elabora la lógica moderna, pero bajo la hipótesis de que esta primera ojeada podría despertar la que el propio Frege lanzó sobre su descubrimiento. Es indudable que el análisis de las razones del autor excluía, metodológicamente, una lectura retrospectiva. Por lo demás, ésta ha sido hecha ya y por los mejores lógicos. Baste citar el nombre del profesor Quine.

[6] Jean T. DESANTI: *Les Idéalités mathématiques*. París, Ed. du Seuil, 1968, p. 286.
[7] *Ibid.*, p. 8.

Capítulo segundo

# Trazado de Los Fundamentos de la Aritmética

La obra de Frege está toda ella animada por una misma intención: la de construir la aritmética por medio únicamente de los recursos del pensamiento puro. Esta intención es realizada en los dos tomos de las *Leyes fundamentales de la aritmética* de 1893-1903: «Con este libro llevo a ejecución un proyecto que tenía planeado desde mi *Begriffschrift*, de 1879, y que empecé en mis *Fundamentos de la aritmética* de 1884.»[8]

Se cometería una injusticia con la continuidad de esta obra y con el genio de Frege, si se quisiera dar razón de los *Fundamentos* ignorando su conexión con los demás escritos del autor y desconsiderando su economía interna. No obstante, han sido suficientes dos resultados aislados de su contexto, para asegurar la fama de esta obra. Se reconoce que en ella se puede leer la primera definición admisible de número cardinal[9] y la construcción de los números llamados naturales según un método que admite ser comparado con el de Dedekind.[10]

Estos elogios tradicionales no carecen de malicia. Salvando de la obra aritmética de Frege estos dos únicos resultados, uno puede permitirse ignorar el lenguaje simbólico en el que aparecen enunciados en las *Leyes fundamentales*, y callarse el aparato lógico en el que fueron concebidos desde los *Fundamentos*.[11] Ahora bien, si se ponen en cuarentena el método y la forma, es decir, el conjunto de análisis lógicos que quedan disimulados por la lengua vulgar de los *Fundamentos*, resultaría que éstos no tendrían otro interés que el histórico,

[8] *Grundgesetze der Arithmetik (Leyes fundamentales de la Aritmética)*, tomo I, p. VIII.
[9] B. RUSSELL: *Introduction à la philosophie mathématique*, p. 23.
[10] N. BOURBAKI: *Éléments d'histoire des mathématiques*, p. 45.
[11] Así, N. Bourbaki transcribe en términos conjuntistas modernos la definición fregeana, puntualizada con una simple observación: todas estas definiciones, naturalmente, fueron expresadas por Frege en su lenguaje de la «lógica de conceptos». *Ibid.*, nota de la p. 45.

el interés de una anticipación genial y desafortunada de las construcciones ulteriores, de los *Principia Mathematica* o de los tratados conjuntistas. Sin embargo, el genio de Frege detuvo la crítica por el camino de estas conclusiones e impidió que sus definiciones fueran relegadas al olvido. Intentaremos conectarlas con sus premisas, siguiendo el consejo del subtítulo: *investigación lógico-matemática*. Los recursos lógicos puestos en juego en estas definiciones son, teniendo en cuenta la totalidad de la obra de Frege y su posteridad actual, la máxima aportación de los *Fundamentos*. Aquí se leen, en efecto, los elementos esenciales de una teoría general de las aplicaciones; sobre esta teoría se basa la identidad, hasta entonces inadvertida, de la función y el concepto, el criterio extensional de los conceptos y la definición del número. Esta última resulta de una inversión de las nociones lógicas tradicionales, y éste es, exactamente, el juicio que Frege hizo de su obra: «El resultado fundamental [de los *Fundamentos de la aritmética*] viene dado en el párrafo 46, donde se dice que la asignación de número es un enunciado que se refiere a un concepto.» [12]

Pero hablemos primero de los lectores que halló la obra de Frege.

Gottlob Frege (1848-1925), matemático poco escuchado de la Universidad de Jena,[13] fue muy poco leído durante su vida. La *Begriffschrift* (1879) pasó desapercibida, si se exceptúa una reseña poco perspicaz de Schröder; [14] los *Fundamentos* (1884) fueron más criticados que comprendidos.[15] Por lo que hace a las *Leyes fundamentales* (1893 y 1903), fueron reveladas [16] a los lógicos y matemáticos por B. Russell, quien hizo un análisis crítico y muy elogioso de la obra de Frege en el *Apéndice A* a los *Principles of Mathematics* (1903). Pero esta primera gloria fue malaventurada: el filósofo inglés descubría

[12] *Grundgesetze*, I. Introducción, p. IX.

[13] V. CARNAP en *The Philosophy of R. Carnap. Autobiography, My student years*, p. 5. «La clase se reducía a nosotros dos y a un oficial retirado.»

[14] «Zeitschrift für Math. und Physik», t. XXV.

[15] Véase la reseña de Cantor analizada más abajo. Frege quedó afectado por el hecho de que los *Fundamentos* no fueran ni siquiera mencionados en el «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik».

[16] Peano conocía los escritos de Frege desde 1891; en 1895 hizo un informe de las *Leyes fundamentales* (I), pero no penetró nunca en el simbolismo fregeano. Es probable que Russell conociese a Frege a través de las citas de Peano. Véase NIDDITCH, *Peano and the recognition of Frege*, Mind, 1963.



al mismo tiempo la paradoja implicada en la ley fundamental V. A pesar del homenaje, la obra sufrió un golpe en sus principios, al ser puesto en duda un instrumento esencial de la construcción fregeana.[17]

Esta sensación prevaleció durante largo tiempo. Hoy día, la contradicción señalada por Russell aparece como una imperfección localizada del primer sistema de lógica moderna. Y esta nueva apreciación rectifica sustancialmente la perspectiva.

Durante el primer cuarto del siglo XX, diversas teorías axiomáticas, la de Zermelo o la de Von Neumann, trataron de los conjuntos, que este último distingue de las clases, y definieron el número ordinal y luego el cardinal, eliminando así las causas de la contradicción. La antinomia de las clases quedaba resuelta de este modo, y el interés de los lógicos se desplazó de la definición del número a los problemas generales de los lenguajes bien hechos. Con el tiempo, el repetido elogio de Russell y la admiración de Wittgenstein pesaron más que las críticas [18] y la obra de Frege reveló un cuerpo de doctrinas lógicas demasiado nuevas en la época de su publicación, para que pudiesen ser enteramente comprendidas. Solamente en nuestros días ha recibido el lógico el homenaje que se merecía.[19]

En los tres primeros capítulos de los *Fundamentos*, Frege analiza las aporías tradicionales que pesan sobre las nociones fundamentales de la aritmética. El examen se dedica a veces a una revisión minuciosa, quizás complaciente, de los errores de los demás, pero la agudeza lógica es la misma en todas partes. El final del capítulo III y el capítulo IV constituyen el núcleo de la obra; se define aquí la noción de número

[17] La carta de Russell a Frege en la que se enuncia la contradicción aparece publicada en *From Frege to Gödel, A Source Book...*, así como la respuesta de Frege y una nueva profesión de admiración de Russell hacia Frege, p. 124.

[18] Véase, además de los textos citados, *Portraits from Memory, My Philosophical Development, Autobiography...*, y, por lo que hace a Wittgenstein, el prólogo al *Tractatus Logico-Philosophicus*.

[19] Véase, entre otros, la introducción de J. van Heijenoort a la traducción de la *Begriffschrift* en *A Source Book* y el artículo sobre Frege en la *Encyclopedia of Philosophy*, 1967, a cargo de M. Dummett. Las publicaciones y traducciones de los artículos calificados de filosóficos, es decir, de intención estrictamente lógica, son un signo de este cambio de perspectiva; este cambio se ha operado en el curso de los veinte últimos años. Véase, FURTH, *The Basic Law of Arithmetic*, p. VI y VII.

cardinal y después los números llamados naturales. Ahora bien, estos resultados no se pueden disociar de la lógica puesta en juego; por ello, hace falta recordar primero la aportación de la *Begriffschrift*. Por lo demás, la exposición, a veces elíptica, de los *Fundamentos* exige ser esclarecida por medio del texto definitivo de las Leyes fundamentales, para las cuales los *Fundamentos* procuran el esquema y las razones filosóficas. Las tendremos en cuenta cuando sea la ocasión.

Capítulo tercero

# La ideografía de Frege

En tres distintas ocasiones se hace alusión a la ideografía en los *Fundamentos de la aritmética*. En el apartado 17, Frege recuerda la definición de lo analítico heredada de la *Begriffschrift*; esta definición ha de poner fin al prejuicio de que las proposiciones analíticas son estériles. En segundo lugar, Frege utiliza (apartado 79) una definición de sucesión *(Folgen in einer Reihe)* reproducida textualmente de la sección tercera de la *Begriffschrift*. Finalmente, la definición de número cardinal requiere la noción de extensión de concepto (apartado 69). Esta noción, ignorada en la primera ideografía, obligó a Frege a hacer una segunda exposición, revisada, de su lenguaje simbólico.[20] No puede subestimarse la importancia de esta modificación, puesto que retrasó en varios años la redacción de las *Leyes fundamentales*.[21] De hecho, la obra de Frege podría caracterizarse con bastante adecuación viendo en ella la dilación perpetua de la construcción del edificio de su ideografía [22]. Por el momento es suficiente constatar que los resultados que habitualmente se atribuyen a los *Fundamentos* son, en último análisis, la consecuencia inmediata de los progresos de la ideografía y no pueden ser separados de ella.

[20] Se trata de los párrafos 1 a 52 de las *Grundgesetze* I, *Darstellung der Begriffschrift*. Recogen, corrigen y completan la primera sección de la *Begriffschrift* de 1879. Nos referiremos a ellos como la segunda ideografía.

[21] «La razón que ha retrasado la ejecución de mi proyecto... reside, en parte, en los cambios internos que tuve que aportar a mi ideografía, ya que tuve que arrojar al cesto un manuscrito casi concluido... [sigue la exposición de estas modificaciones que se desprenden de la introducción de las extensiones de concepto y de la distinción entre sentido y referencia]... Se ve cómo estos años no han transcurrido en vano... han conducido la obra a su madurez.» *Grandgesetze* I, p. IX.

[22] En contra de la opinión acreditada por una conjetura rápida de RUSSELL (*My Philosophical Development*, p. 76), Frege no cesó de perfeccionar su obra lógica. Véanse sus últimas publicaciones: *Recherches logiques* y el testimonio de CARNAP, *op. cit.*, pp. 4 y 5.

Se ha alabado la ideografía ante todo por la sutileza de su simbolismo y por su poder de eliminar las riquezas inútiles e imperfecciones del lenguaje común. En este sentido, el *lenguaje por fórmulas* de Frege se inscribe en la tradición de las tentativas de elaborar un lenguaje artificial, que han tenido lugar, escalonadamente, desde la Edad Media. Pero el lenguaje de Frege se distingue de tales ensayos en el sentido de que Frege fue el primero en elaborar, efectivamente, este lenguaje lógico, que sus predecesores no habían hecho más que desear. Este éxito[23] depende del doble aspecto de las investigaciones de Frege.

El primer aspecto es la invención de un simbolismo enteramente original. El simple recurso de símbolos convenidos permite, sin duda, reducir las «jugarretas» del uso, puesto que la formación de «palabras» lógicas a partir de símbolos elementales se hace de forma regular. Pero estas convenciones, por sí solas, ofrecen a lo sumo una paráfrasis del lenguaje común en fórmulas y, por esta razón, sobreestiman las capacidades de análisis de las lenguas vernáculas. Todas las tentativas anteriores a la de Frege sufren de este exceso de confianza: tal es el caso de los simbolismos inspirados de Port-Royal y de Leibniz. Su determinación común era la de transformar toda proposición del lenguaje en uso en una o más proposiciones atributivas, simbolizando seguidamente tales proposiciones mediante la interpretación de la comprensión de los términos. Ahora bien, la forma atributiva es ambigua, puesto que sirve igualmente para expresar la identidad como la cualidad de los individuos o la subordinación de los conceptos —pero, sobre todo, con ella no podrían reducirse ciertas proposiciones del lenguaje científico usual, tales como las relaciones y las proposiciones de existencia. La comparación de la *Lógica* de Port-Royal y la *Gramática* de Port-Royal proporciona un ejemplo iluminador. Mientras que la gramática hace un recuento y explica todos los tipos de proposiciones (tanto si son atributivas, como si incluyen casos oblicuos), y analiza la función de todos sus elementos (entre ellos, las preposiciones, los artículos y pronombres), la lógica no conserva sino la forma canónica: sujeto-verbo,[24] y aquellas formas que se pueden traducir a ésta; de ello resulta una limitación insoportable de los enunciados traducibles, si se quieren transcribir a un lenguaje formal todas las proposiciones de una ciencia. Por añadidura, el cálculo lógico asociado a un simbolismo semejante queda limitado únicamente al cálculo de cualidades, como dice Leibniz,[25] o de dominios.[26]

[23] Éxito indiscutido. Los perfeccionamientos ulteriores tuvieron como efecto simplificar el simbolismo y restituir la escritura lineal con la cual Frege había tenido la audacia de romper, a nuestro juicio, sin gratuidad. Véase la justificación que da de esto el propio Frege: *La escritura conceptual del señor Peano y la mía. Kleine Schriften*, p. 222.



Antes de examinar las críticas que Frege hace a los herederos de Leibniz por estos defectos comunes a los formalismos clásicos, es preciso indicar el otro aspecto de la escritura conceptual. Al ofrecer ésta una lógica independiente de la gramática recibida, permite analizar efectivamente los enunciados de modo distinto al sugerido por las lenguas naturales. Una investigación semejante enumera las nociones lógicas primitivas; y el estudio de su composición en una sucesión de proposiciones verdaderas, independientes de todo dato empírico, supera el método de los clásicos y la teoría de la ciencia de los modernos.[27]

Estos dos aspectos se ponen de manifiesto en el subtítulo de la *Begriffschrift: lenguaje del pensamiento puro concebido a imagen de las fórmulas de la aritmética.* Frege quiso generalizar el principio de un simbolismo que ya había sido puesto a prueba: la característica aritmética. Pero en este subtítulo están igualmente presentes los dos autores a los que Frege se encomienda. De Leibniz proviene el proyecto de un cálculo lógico, de Kant, la intención de decribir sistemáticamente los poderes del pensamiento puro, puestos aquí de manifiesto en la eficacia de su lenguaje. Una vez reconocida esta fidelidad profunda, se podrán juzgar más equitativamente las críticas que Frege dirige a estos autores.

Unas veces Frege se apoya en la autoridad de Leibniz, del cual recoge el proyecto de una *lingua characterica,*[28] otras se separa de él, al atribuir una herencia leibniziana a la lógica

[24] La teoría lógica de la forma canónica proviene término por término de la gramática. *La logique ou l'art de penser*, 1. II, cap. II.

[25] V. H. SCHOLZ: *Esquisse d'une histoire de la logique*, cap. III.

[26] Véase más abajo las críticas que hace Frege a este cálculo.

[27] Véase *Begriffschrift*, Introducción, p. V, donde Frege cita a Leibniz y Bacon, y la Introducción a las *Leyes fundamentales*. La segunda escritura conceptual contiene ocho *nombres* lógicos primitivos. *Grundgesetze*, I, párrafo 31.

[28] Frege toma esta expresión de los editores de Leibniz. En este último se encuentra el término *lingua rationalis* (véase PATZIG, Introducción a las *Logische Untersuchungen*, nota 8, p. 10).

de Boole y Schöder. Para esclarecer estas filiaciones confusas, hay que citar los textos.

«...Leibniz reconoció las ventajas de un modo de designación adecuado, quizás incluso las sobrevaloró. Su proyecto de una característica universal, de un *calculus philosophicus* o *ratiocinator*, era demasiado gigantesco para que su tentativa de ejecutarlo pudiese ir más allá de simples preliminares.»[29]

En 1879, Frege identifica, según parece, característica y cálculo, sin duda porque les asocia los términos *ratiocinator* y *philosophicus* como sinónimos. En tal caso, el cálculo lógico debe ser capaz de expresar contenidos conceptuales *(begriffliche Inhalte)*, la materia de los juicios *(beurtheilbare Inhalte)*.[30] No se trata sino de la característica, acompañada de sus reglas de uso. Frege no tiene nada que objetar a este proyecto, salvo que fue prematuro querer crear de golpe una característica *universal*. La *Begriffschrift*, por su parte, lo lleva a cabo parcialmente.

Al publicar Schröder una crítica fácil y exterior a la ideografía fregeana, juzgada por comparación con el cálculo booleano, Frege le respondió[31] (en 1882): «En realidad, yo no he querido hacer un simple *calculus ratiocinator*, sino una *lingua characterica* en el sentido de Leibniz.»

Aquí Frege disocia las dos partes del proyecto de Leibniz: la característica, traducción a símbolos que refleja las relaciones entre los objetos simbolizados, y el cálculo *seu artificium facile et infallibiter ratiocinandi*.

Ese mismo año, Frege critica el modo de expresión de las relaciones lógicas propuesto por Leibniz «y que recientemente fue renovado por Boole, Grassman, Jevons, Schröder...»[32] A estos lógicos, en común, les hace el reproche de que su simbolismo es incapaz de expresar «contenidos». Por consiguiente, la utilización de signos aritméticos para expresar las relaciones lógicas es una importación arbitraria. Se dirá quizás

[29] *Begriffschrift*, p. XI.

[30] Posteriormente, Frege disoció el contenido del juicio en sentido y referencia. El sentido constituye un pensamiento *(Gedanke)*, cuya referencia es un valor veritativo, lo verdadero o lo falso. A. Church propone traducir *Gedanke* por *proposición* (en el sentido abstracto). *Introduction to Mathematical Logic*, p. 26.

[31] *Sobre el objeto de la Begriffschrift*, p. 2. El artículo en su totalidad es una respuesta a Schröder. *Begriffschrift und andere Aufsätze*, página 97.

[32] Que la escritura conceptual tiene su justificación en las necesidades de la ciencia. *Begriffschrift und andere Aufsätze*, p. 112.



que no es peligrosa, puesto que en realidad se introduce un signo algebraico vacío, cuya significación debe ser precisada dentro del contexto del sistema en que figura. Pero esto es precisamente lo que Frege rechaza: las relaciones lógicas están perfectamente determinadas, pertenecen al pensamiento puro y resultan de los contenidos conceptuales mismos, por lo menos de aquellos que son puramente lógicos. Dentro de esta perspectiva, en rigor se podría concebir una característica que no fuera completada por medio de un cálculo; pero, en cambio, si se empieza por el cálculo, uno queda condenado a una lógica «abstracta», es decir, heredada inconscientemente de la gramática común.[33]

Con el tiempo, Frege tuvo que defender la originalidad de la ideografía y reconocer la ambigüedad de la tradición leibniziana. Si bien aprueba los intentos de una característica, su crítica no perdona la obra efectiva de Leibniz,[34] el cálculo de dominios, ni sus desarrollos del siglo XIX.[35]

Queda por ver que la ideografía, lo mismo que el cálculo de Boole, se inspira en la aritmética; también hace falta precisar los préstamos respectivos.

El cálculo de Boole es un álgebra a la que van asociadas por lo menos dos interpretaciones lógicas.[36] Frege le reprocha una imprecisión fundamental, ya que las constantes algebraicas de operación reciben una interpretación diferente según que los símbolos asociados a estas constantes representen conceptos o juicios. Dado que un símbolo, tal como +, recibe un sentido *ad libitum*, es realmente un símbolo vacío, no puede transmitir ningún contenido propio. Por lo demás, si alguna vez esta lógica tuviese la ambición de servir de fundamento de la aritmética, se vería incapacitada para ello. La interpretación lógica de los símbolos, ya insegura, entraría en conflicto con su sentido aritmético usual. La pluralidad de interpretaciones es, para Frege, signo manifiesto de la insu-

[33] *Sobre el objeto de la Begriffschrift*, p. 1.

[34] Se trata de la obra conocida a fines del siglo XIX, contenida en los opúsculos publicados por Erdmann.

[35] Frege cita el *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, aunque apunta al cálculo *De continentis et continentibus*. Sobre las imperfecciones del cálculo de dominios, véase más abajo.

[36] *Sobre el objeto de la Begriffschrift, op. cit.*, p. 97 y 100. Véase igualmente W. y M. KNEALE: *The Development of Logic*, p. 412 y 414. Las dos interpretaciones examinadas por Frege son la aplicación del cálculo a las clases o términos *(primary propositions)* y a las proposiciones complejas *(secondary propositions)*.

ficiencia del simbolismo. Boole había querido dar una transcripción algebraica de las leyes del pensamiento; en realidad, definió un álgebra particular, de la cual el cálculo de funciones de verdad es un modelo entre otros.

La intención del préstamo de Frege es completamente distinta. La aritmética presenta un ejemplo feliz de característica [37] y Frege quiso imitarlo, pero en realidad no le presta ninguno de sus elementos a la ideografía. «La imitación de las fórmulas aritméticas que he indicado en el título se refiere más a las ideas rectoras que a los detalles de escritura... Es por el modo como se emplean las letras por lo que mi lenguaje de fórmulas se acerca lo más posible al lenguaje de la aritmética.»

De entre los signos artméticos, Frege distingue las letras «que representan un número o una función aún no determinados, de los signos como: +, —, √, 0, 1, 2... que tienen su significado propio. Esta diferencia entre signos de constantes y signos de variables, que permiten expresar la generalización, es el único principio que la ideografía conserva de la aritmética. En verdad, la aritmética ha jugado el papel de paradigma en un doble sentido. En primer lugar, Frege vio en ella el ejemplo de una escritura simbólica adecuada a su objeto, en la que el formalismo de los cálculos no excluye la expresión de un contenido; por esta razón, la aritmética es una característica. Además, Frege identificó, en el uso aritmético, una distinción cuya naturaleza es propiamente lógica: la distinción entre variables y constantes. Ahora bien, la utilización de este doble registro de signos es exactamente lo que permite expresar contenidos propiamente lógicos.

Puede determinarse la naturaleza de estos contenidos examinando la práctica misma de Frege en la *Begriffschrift* y la elaboración ulterior de esta noción.[38] Frege denomina «contenido de juicio posible» a una proposición despojada de la aseveración que le va asociada en el lenguaje usual; además, denomina «contenido conceptual» este mismo contenido de juicio, o una parte de tal contenido, despojados de los matices que introduce el lenguaje usual multiplicando las expresiones

[37] Otras ciencias ofrecen el ejemplo de un simbolismo *característico*. Frege cita la geometría y la química, y conserva la esperanza de completar estas características parciales y con lagunas mediante la ideografía, p. IV.

[38] Véase el artículo *Sentido y referencia*, la escritura conceptual de las *Grundgesetze*, en que se analiza en sentido y referencia el contenido del juicio y la investigación lógica *Der Gedanke*.



sinónimas. Así, por ejemplo, se dirá que «los griegos vencieron a los persas en Platea» y «los persas fueron vencidos por los griegos en Platea» expresan un mismo contenido conceptual.[39] Con este término, Frege designa lo único que importa en la realización de una prueba.[40] No hay que engañarse: el «contenido conceptual» es, en realidad, un contenido proposicional; la escritura conceptual es una escritura de proposiciones analizadas, no de «ideas» en el sentido en que este término ha sido a veces sinónimo de «concepto». Frege precisa esto en su respuesta a Schröder (*op. cit.*, p. 101): «... Una de las diferencias más notables entre mi concepción y la de Boole, y, puedo añadir, la de Aristóteles, proviene de que yo no parto de conceptos,[41] sino de juicios.» Es verosímil que Frege escogiese el nombre de *Begriffschrift* para indicar que esta escritura era apropiada para simbolizar contenidos puramente racionales, libres de toda connotación empírica —más tarde, se arrepintió del título dado, en 1879, a su opúsculo. Ahora bien, resulta que se pueden construir tales contenidos de juicio, a poco que se tome la igualdad por una constante lógica de predicado y que se introduzca una notación particular para ligar las variables.[42]

Estos contenidos propiamente lógicos son la existencia, la universalidad, la identidad, las relaciones entre contenidos de juicios elementales expresados por medio de las funciones proposicionales constantes, tales como la implicación material y la negación. Es decir, los contenidos de juicios «del pensamiento puro» son todas las proposiciones, en el sentido moderno del término, simples o complejas, que se pueden escribir con la única ayuda del vocabulario de la lógica de proposiciones

[39] *Begriffschrift*, párrafo 3.

[40] *Begriffschrift, ibid.*, y la Introducción, p. IV.

[41] Desde luego, *concepto* se emplea aquí con sentido de *idea general, término*, no en el sentido técnico de *predicado*.

[42] Cuando Jourdain propuso simplificar la ideografía empleando minúsculas góticas para lo que hoy día se llaman variables aparentes [o variables «ligadas». *N. del T.*], y minúsculas latinas como símbolos de variables libres, Frege consintió en ello con cierta repugnancia. Pueden sospecharse sus razones. La variable ligada o aparente es, en la concepción de Frege, un elemento *contextual* de una función de segundo orden, en que el verdadero argumento es el concepto al cual se le atribuye una extensión universal; esta función de segundo orden es una constante. En cuanto a la variable libre, es un signo de argumento. Véase *Función y concepto*, pp. 26-27. *Kleine-Schriften*, pp. 139-140, y *Grundgesetze*, I, 21. Véase también el apéndice 2.

y de la teoría de la cuantificación.[43] Frege da un ejemplo de ello, definiendo la noción de «seguir en una serie» a partir únicamente de los términos lógicos primitivos, y esto es la primera pieza en la construcción lógica de la aritmética.[44]

Más allá de la habilidad en la escritura, la posibilidad de enunciar o de construir *contenidos* solamente con el recurso de la ideografía tiene una consecuencia epistemológica que subraya Frege: el prejuicio de que la lógica es estéril pierde su verosimilitud, pero asimismo ocurre con el precepto kantiano, según el cual todo *conocimiento* se basa en la intuición, aunque sólo sea la intuición pura. Al mostrar que la ideografía permite definir la *sucesión,* Frege desplaza el punto en el que Kant había marcado la frontera entre proposiciones analíticas y proposiciones sintéticas. Es una primera revisión de la lógica kantiana;[45] la crítica se lleva a cabo completamente en los *Fundamentos,* donde Frege somete a juicio severo la teoría del concepto.

Se admite hoy que la *Begriffschrift*[46] constituye una primera exposición del cálculo de proposiciones y de la teoría de la cuantificación, una teoría de la identidad y los elementos de una teoría general de las series. Las dos primeras exposiciones son introducidas de manera semántica en la primera sección y desarrolladas deductivamente en la segunda sección. Se supone que este primer «lenguaje del pensamiento puro» ofrece recursos suficientes para la construcción de la aritmética; por una parte, toda proposición de la aritmética puede ser transcrita a este lenguaje —y, por estas fechas, Frege piensa precisamente en los razonamientos inductivos—; por otra parte, las proposiciones en lenguaje común que acompañan a las fórmulas aritméticas tienen también su imagen en la ideografía. Más exactamente, lo que se acostumbra a llamar *razonamiento* se muestra enteramente con la simple presentación

[43] Más exactamente, éstos son todos los enunciados construibles a partir de los ocho *nombres lógicos* primitivos enumerados en el párrafo 31 de las *Grundgesetze,* I.

[44] *Begriffschrift,* 3.ª sección.

[45] Frege utiliza constantemente el vocabulario kantiano en las secciones primera y tercera de la *Begriffschrift,* incluso cuando sus numerosas críticas atacan la lógica kantiana. Con todo, la revisión pretende conservar lo esencial de Kant, la distinción entre analítico y sintético. Lo mismo vale para los *Fundamentos.* No hay que olvidar que Frege hizo sus estudios de filosofía en Göttingen, donde obtuvo el doctorado de filosofía en 1873.

[46] Véase J. VAN HEIJENOORT: *Op. cit.,* Introducción a la traducción inglesa de la *Begriffschrift,* p. 4.



*(Darstellung)* vertical de las pruebas.[47] En fin, este lenguaje de sintaxis regular tiene las propiedades de un sistema formal.

En particular, la *Begriffschrift* define todas las nociones requeridas para una teoría de los ordinales finitos: la de «antecesor» y de «antecesor propio» en el sentido de Quine[48] (fórmulas 76 y 99), la de correspondencia unívoca[49] y la de orden lineal simple (fórmula 133). Estas nociones fueron utilizadas efectivamente por Dedekind y Peano en su estructuración de la aritmética, y parece entonces que Frege estuvo a punto de anticiparse a sus trabajos. Al explicar la marcha de su investigación, Frege escribe, en la introducción a la *Begriffschrift*: «Mi procedimiento fue el siguiente: traté de llevar el concepto de orden serial a la consecución lógica, para avanzar seguidamente hasta el concepto de número *(Zahlbegriff)*.»[50]

Quince años pasaron, empero, entre la *Begriffschrift* y las *Leyes fundamentales,* durante los cuales Frege prosiguió sus investigaciones por otros caminos. Si bien la ideografía era capaz de analizar la transmisión inductiva de una propiedad, carecía de potencia para definir el soporte de los razonamientos inductivos aritméticos, el número cardinal *(Anzahl),* definido más tarde como una extensión de concepto. En los *Fundamentos de la aritmética,* Frege ofrece con todo su detalle esta nueva etapa del análisis. Prepara también la revisión de la ideografía con el fin de que se pudiesen definir en ella «objetos lógicos», en especial los números cardinales. Con esta elección, tomó un camino solitario en el que no halló ninguna simpatía, mientras que la última sección de la *Begriffschrift,* al ser leída tardíamente por unos pocos matemáticos, obtuvo su aprobación.[51]

[47] Véase *La ideografía del señor Peano y la mía, Kleine-Schriften,* p. 222.

[48] *Set Theory and Its Logic,* p. 100.

[49] O sea, de aplicación o función. *(N. del T.)*

[50] *Begriffschrift,* p. X. Véase igualmente p. XIV.

[51] Véase la correspondencia Dedekind-Keferstein, citada más abajo.

Capítulo cuarto

# Composición de los Fundamentos. Crítica de la concepción común de número

Los *Fundamentos* se dividen en dos partes, por el estilo y por el contenido. En la primera, esencialmente crítica, se analiza el número cardinal, elaborado en el capítulo IV, en el que la exposición toma un carácter distinto. La parte crítica recomienda en el capítulo V, con un examen polémico de las teorías que se refieren a los *otros números,* sin que, esta vez, se dé el esquema de su construcción.

¿Era necesario que una parte tan importante estuviese dedicada a la refutación? Participa, en realidad, de la demostración que le sigue, destruyendo la concepción ingenua —y, a pesar de ello, universalmente aceptada— del número. Esta «concepción ingenua del número cardinal... choca con tres escollos. El primero es el de saber cómo son compatibles la identidad de las unidades y su discernibilidad. El segundo reside en la definición de los números cero y uno, el tercero en la de los grandes números.» [52] Esas dificultades, que Frege opone en 1894 a la *Philosophie der Aritmetik* de Husserl, son las mismas que los *Fundamentos* habían puesto de relieve y resuelto diez años antes. Sin duda, son particularmente importantes para el empirismo; pero, leyendo los *Fundamentos,* uno queda asombrado al ver con qué frecuencia los matemáticos y los filósofos confundieron la aritmética racional con la técnica de contar. Si Frege ataca de paso a algunos grandes nombres, es por el modo empirista con el que, a veces sin saberlo, establecieron su teoría de la aritmética. La crítica afecta a Mill, pero también a Kant, Hankel, Weierstrass y Leibniz mismo. Se comprenderá mejor la actualidad de una refutación de Mill, si se piensa que la *Philosophie der Aritmetik* renovó en 1894 argumentos directamente inspirados por el empirismo anglosajón.[53] En el caso de Hankel, Frege critica la confusión

[52] Reseña crítica de E. G. HUSSERL: *Philosophie der Arithmetik,* en *Kleine-Schriften.*

[53] Reseña crítica de HUSSERL: *Philosophie der Arithmetik,* pp. 179 y 181.

entre signo y designado, y la esperanza de explorar el campo entero de la aritmética sobre el modelo de un uso protocolar de los signos. Este empirismo es el de un académico cuyo universo se limita a la pizarra y al pedazo de tiza, pero que ignora la potencia especulativa que libera el tratamiento puramente lógico de los contenidos de juicio. Una regla de escritura no es una regla de deducción.[54] A Kant se le reprocha la apelación a la intuición, aunque sólo fuera intuición pura,[55] y un pensamiento demasiado sometido al lenguaje común y a la teoría clásica —es decir, aristotélica— de la abstracción. Finalmente, matemáticos tan experimentados como Leibniz y Weierstrass [56] concuerdan al definir los números particulares por medio de la unidad y de la adjunción de la unidad. En tal caso, todavía falta por saber lo que es una unidad, hasta entonces confundida con un objeto cualquiera, soporte y ocasión del acto de contar.[57] La célebre definición de Leibniz descansa, en realidad, en la intuición del boliche, no muy diferente de los pastelillos y los montones de guijarros de Mill. No es sorprendente que este último volviera a utilizar textualmente la definición de Leibniz.[58]

Si la teoría de la aritmética ha podido reunir en conjunciones inesperadas a filósofos considerados como enemigos, habrá que creer que el empirismo proviene aquí de la dificultad del objeto examinado. Impotentes para definir el número y el *uno* de la aritmética, filósofos y matemáticos se sienten seguros con lo que es conocido por todos, lo que se enseña en el jardín de infancia [59] e invocan el «1+1» como la operación elemental y la paradigmática de toda la aritmética. El hecho es incontestable, pero su interpretación decepcionante: como el ejemplo no nos lleva a nada fuera de sí mismo, se adorna

[54] Véase, más abajo, el papel del juicio de reconocimiento en los *Fundamentos*. El formalismo, tal como lo concibe Hankel, prohíbe toda deducción de la aritmética. Véase más abajo la crítica de «la aritmética formal».

[55] *Fundamentos*, 12 *in fine*.

[56] Frege cita la obra de KOSSAK: *Die Elemente der Arithmetik*. Según J. Cavaillès, Kossak expone la teoría de Weierstrass. Véase *Philosophie Mathématique*, p. 39.

[57] Habría que distinguir igualmente la función *sucesor*, que permite generar la serie de los números, de la operación *adición*, definida sobre el conjunto de los números, construido previamente.

[58] *Fundamentos*, 18, p. 25. Citamos el texto con la paginación original [p. 29 de la trad. cast.].

[59] *Fundamentos*, p. III [p. 14 de la trad. cast.].



con los atributos de la evidencia intelectual, y el acto simple del calculador pasa por ser la definición del número.

Ciertamente, la primera parte de los *Fundamentos* refuta materialmente a los autores citados, pero afecta sobre todo la concepción misma del número. Pone a prueba no tanto el número, ya que se trata siempre y a la vez del número de los aritméticos y del número de la vida corriente, como el concepto mismo de número. Para indicar el término de la investigación, se mostrará que el *concepto* de número no es lo abstracto de los números particulares llamados «naturales». El concepto viene dado bajo la forma de una función [60] en la que figura un parámetro. Cada número particular es la extensión de esta función para un valor dado del parámetro.

Esta es la razón del equilibrio en las partes de los *Fundamentos*. El resultado esencial de esta obra es —de ahí su celebridad— el análisis de la noción de número. Pero este análisis revela al mismo tiempo lo que es, en verdad, un *concepto*, y es justamente en este punto en donde Frege pretende innovar.[61] Los tres primeros capítulos nos encaminan hacia la definición general del número, dada en la última sección del tercer capítulo. El cuarto nos ofrece la definición de los números particulares, y esboza, a la vez, algunas proposiciones aritméticas fundamentales; la conclusión saca las consecuencias filosóficas de esta construcción (crítica de Kant y crítica del formalismo).

Los tres primeros capítulos, en sí mismos, están rigurosamente compuestos según un análisis regresivo, anunciado al final de la Introducción.[62] Puede resumirse como sigue. Bajo la hipótesis de que la aritmética es una ciencia del pensamiento puro, podemos tratar de construirla lógicamente. Pero es necesario mostrar previamente que el número no se abstrae de cosas sensibles, tanto si éstas se toman *singulariter* como si se toman varias juntas en una colección material. Por lo demás, sería iluso pretender alcanzar inmediatamente el concepto de número, que hasta el presente ha escapado al análisis de las mejores mentes. La dificultad es aquí extrema,

[60] En el sentido lógico y fregeano del término. Hoy se diría predicado.

[61] Frege insiste más en la novedad del aparato lógico puesto en juego que en el carácter inédito del resultado. Véase Introducción, p. X, y el subtítulo: investigación lógico-matemática; éste es también el sentido de la confesión de las *Grundgesetze:* «El concepto y la relación son las claves de la bóveda de mi construcción.»

[62] Apartado 4.

puesto que: 1) este concepto es de una estructura particularmente aguda (Introducción, p. IV), 2) su análisis es tan crucial que proporcionará quizás el modo de formación de los conceptos en general (párrafo 2, p. 2). Por eso empieza Frege con un trabajo de orientación. *Con respecto a nuestro conocimiento*, la aritmética demostrará ser ciencia racional pura, si las proposiciones en las cuales la formulamos son analíticas a priori. La naturaleza de estas proposiciones se toma así por un índice de la naturaleza, empírica o racional, de los números. De ahí el primer capítulo. *Con respecto a las cosas mismas*, las proposiciones son analíticas, si se deducen de las leyes lógicas y de las definiciones, es decir, en última instancia, del concepto de número. De ahí el segundo capítulo, que prosigue partiendo de los indicios favorables recogidos precedentemente.[63] La indagación procede primero ingenuamente, como si el número viniese dado en una experiencia cualquiera, interna o externa. Como esta opinión queda destruida por sus inconsecuencias, Frege se pregunta cómo puede ser construido el número a partir de *unidades* (cap. III). La solución del enigma de la unidad proporciona al mismo tiempo la definición del número (cap. III, sección 4).

Esta definición desconcertó a sus primeros lectores. Para seguir su construcción, hay que recordar el criterio analítico utilizado aquí por Frege y justificar la primacía atribuida al número cardinal— mientras que los matemáticos contemporáneos a Frege se dedicaban en primer lugar al número ordinal.

[63] A favor del carácter analítico de las proposiciones aritméticas.

Capítulo quinto

# Carácter de las proposiciones analíticas

Las nuevas ideas aportadas por la *Begriffschrift*, entre ellas la distinción rigurosa entre lo que se refiere al encadenamiento de las proposiciones y lo que se refiere al contenido de estas proposiciones, trastornaron la clasificación usual de los juicios. Desde que la lógica se interesa exclusivamente por la verdad de las proposiciones y por su encadenamiento, el único principio adecuado de distinción entre los juicios es la naturaleza de su prueba. Ésta puede ser enteramente lógica o apoyarse en la intuición. Frege ignora las oposiciones usuales, según la cualidad, la cantidad o la modalidad de los juicios,[64] pero retiene la distinción *trascendental* entre juicios a priori analíticos y sintéticos. Con todo, los criterios de analiticidad deben ser revisados y los *Fundamentos* (3, 16 y 17) aplican al problema las enseñanzas de la *Begriffschrift*.

Según la tradición, una proposición es analítica si *praedicatum inest subjecto*. Kant no contradijo a Leibniz en este punto; muy al contrario, utiliza la definición recibida de las proposiciones analíticas para oponerles, en el campo de lo a priori, las proposiciones sintéticas. Ahora bien, esta dicotomía no puede aplicarse más que a las proposiciones generales. No deja lugar para las proposiciones existenciales,[65] que son de uso corriente en álgebra, por ejemplo cuando se afirma que una ecuación tiene una o más soluciones. Este defecto revela un error más profundo, a saber, el de haber asociado la cualidad de analítico al contenido de juicio mismo, cuando en realidad se refiere al tipo de premisas en las que se basa el acto de juzgar. Sin poner en duda el criterio kantiano, en 1879 Frege se había opuesto a su empleo en diversas ocasiones.[66] Añade aquí que, tomada en su sentido filosófico la distinción entre analítico y sintético a priori es, en verdad, epistemológica y se refiere a la naturaleza de las pruebas. La distinción kantiana, al exigir que se midan una por una las sig-

[64] *Begriffschrift*, sección I, 4.
[65] *Fundamentos*, 88, p. 100 [p. 108 de la trad. cast.].
[66] Véase *Begriffschrift*, sección I, 8, y sección III, 24.

nificaciones de los conceptos de una proposición, es puramente lingüística, o gramatical en un sentido amplio, en el sentido en que Frege acusa a la lógica clásica de haber seguido las sugerencias de las gramáticas naturales.

Una proposición es analítica si se desprende de las leyes lógicas generales y de las definiciones. Las leyes lógicas generales son las proposiciones fundamentales de la lógica proposicional y del cálculo de predicados —su contenido es equivalente a las proposiciones que aparecen en primer lugar en las axiomáticas lógicas contemporáneas. Hay que añadir la regla de separación, la regla de generalización y la que rige la substitución de idénticos.[67] Una primera forma de esta regla viene dada en la *Begriffschrift* y en los *Fundamentos* se identifica con el principio leibniziano: *Eadem sunt quae substitui possunt salva veritate.* Las definiciones,[68] que son juicios de identidad, no nos hacen salir del campo de lo analítico.

Esta descripción de lo analítico recubre exactamente lo que hoy se entiende por demostración.[69] Ya no apela a las relaciones de comprensión entre los conceptos y, lo que es esencial, libera el encadenamiento racional de la necesidad de estar conforme con la analiticidad silogística.[70]

[67] *Begriffschrift*, 8. (A = B) significa que el signo A y el signo B tienen el mismo contenido, de manera que siempre se puede poner A en lugar de B y recíprocamente. La regla de sustitución propiamente dicha no fue enunciada explícitamente por Frege. Véase CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 157.

[68] Una definición informa de que hay sinonimia entre un conjunto de signos pertenecientes al lenguaje primitivo y un signo introducido posteriormente, pero simple. Una definición semejante se califica de nominal. Más exactamente, la introducción de un signo nuevo pertenece al metalenguaje. Una vez establecida, la sinonimia de los signos que figuran a izquierda y derecha del signo de equivalencia es el contenido de una proposición verdadera. El doble aspecto de la definición se indica, desde la *Begriffschrift*, por una doble barra que precede el trazo de contenido del juicio: | |—— (*Begriffschrift*, sección III, 24, y *Grundgesetze*, I, 27).

[69] Una demostración es una sucesión de proposiciones tales que cada una de ellas, ya sea un axioma o una definición, se obtenga de las proposiciones precedentes por aplicación de una regla de deducción inmediata.

[70] Es sabido que Leibniz había creído poder reducir un razonamiento aritmético a la primera figura silogística, tratando la identidad como un caso particular de la inclusión de las comprensiones de concepto, el caso en que éstas coinciden. Se comprende entonces la ironía de Frege en el párrafo 16: ¿es posible que el árbol entero de la matemática esté enraizado en la identidad solamente? El apartado siguiente responde directamente a esta pregunta: el cálculo desarrollado en la *Begriffschrift* amplía el campo de lo analítico.

Capítulo sexto

# Prioridad del número cardinal

Si se quiere comparar los *Fundamentos de la aritmética* con el opúsculo de R. Dedekind,[71] *Was sind und was sollen die Zahlen*, el paralelismo se establecerá a propósito de la *serie natural* de los números. «Aproximadamente un año después de la publicación de mi memoria, tuve conocimiento de los *Fundamentos de la aritmética* de G. Frege, publicados en 1884. Si bien el modo como se considera en esta obra la esencia del número difiere profundamente de la mía, incluye, sobre todo a partir del párrafo 79, numerosos puntos de concordancia con mi escrito, en particular con mi definición 44.[72] Nuestra concordancia no es, ciertamente, fácil de ver, dada la diferencia de formas de expresión, pero la precisión con la que habla de la inferencia de $n$ a $n+1$ (p. 93, al final) muestra con evidencia que nuestras posiciones son las mismas.»[73].

Toda la parte precedente de la construcción de Frege: definición del número cardinal, definiciones del 0 y el 1, no tiene ningún equivalente en el escrito de Dedekind. Pero, además, Dedekind identifica los «números naturales», definidos en el apartado 73 de su ensayo, con los ordinales, y da ulteriormente la definición de los cardinales (apartado 161). La atribución de un cardinal a un conjunto finito de objetos se presenta como una asignación de índice que pone en correspondencia biunívoca un subconjunto propio del conjunto de los números naturales (ordinales) y los elementos del conjunto a numerar. Así, el número cardinal es siempre número cardinal de un conjunto ordenado, en el que se prescinde del orden; es una noción derivada y la aritmética de los cardinales no es más que la aplicación de la aritmética de los ordinales.

[71] Publicado en 1888; pero Dedekind, en el prefacio a la primera edición, dice haber emprendido su investigación varios años antes.

[72] Definición de la *cadena de un sistema*.

[73] R. Dedekind, prefacio a la segunda edición del opúsculo, 1893.

En una carta a Keferstein,[74], Dedekind revela las reflexiones que lo llevaron a la noción de *cadena* y a su definición del número natural (ordinal). Dedekind partió de un análisis de la serie de los números naturales «... tal como se presenta, por así decir, al espíritu. ¿Cuáles son las propiedades fundamentales e independientes entre sí de esta serie N, es decir, las propiedades que no son deducibles unas de otras y de las cuales se desprenden todas las demás? ¿Cómo se podrían despojar estas propiedades de su carácter específicamente aritmético, de manera que sean subsumidas por conceptos más generales y resulten de actividades del entendimiento necesarias para todo pensamiento, pero que sean al mismo tiempo suficientes para garantizar la legitimidad de las pruebas y su compleción...?» Dedekind enumera estas propiedades: la serie de los números es un sistema de elementos ordenados, tales que cada uno de ellos tiene un único sucesor y el primero no es sucesor de ninguno. Pero, añade Dedekind, estas propiedades no bastan para garantizar que todo sistema que las verifica sea estrictamente análogo a la serie de los números naturales. Como deseaba que la definición propuesta para los números naturales fuera categórica,[75] se vio conducido a introducir la noción de *cadena* y a postular que la serie de los números fuese la intersección de todas las cadenas a las que pertenece el elemento 1. Los números se definen, solidariamente, como los elementos de un conjunto tal.

Esta definición de los ordinales, más conocida en la axiomatización de Peano —quien tomó de Dedekind la materia de sus axiomas— responde a la idea común de que los números deben ser definidos a partir de 1 y de la adjunción de 1. Para Dedekind y Peano, así como para Grassmann,[76] los números son, en último término, los elementos de un conjunto al que pertenece el número 1,[77] y cerrado con respecto a la

[74] Publicada en parte por Hao Wang en el artículo *The Axiomatization of Arithmetic*, «Journal of Symbolic Logic», 1957. La traducción completa se halla en *A Source Book...*, p. 99.

[75] Esta definición es, en verdad, la de la *serie natural* de los números y se aplica a todo conjunto provisto de la misma estructura de orden.

[76] Grassmann es citado por Frege en el párrafo 6 de los *Fundamentos*. Su *Lehrbuch der Arithmetik* es considerada como una primera axiomatización de la aritmética, todavía con lagunas, por Hao Wang: *art. cit.*, reproducido en: *A Survey of Symbolic Logic*.

[77] Obsérvese que únicamente el punto de vista cardinal permite hacer empezar en el «0» la serie natural de los números. [*N. del T.*: Esto no es exacto: en la teoría axiomática de conjuntos de Von Neumann-



adición de la unidad a la unidad. O, en otras palabras, reduciendo el número de términos no definidos, los números constituyen un conjunto cerrado con respecto a la operación *sucesor*, aplicada a un primer elemento que no es un sucesor. Como observa Dedekind, Frege tiene una concepción muy distinta de la naturaleza del número. Tiene implicaciones aritméticas e implicaciones lógicas que justifican la prioridad que Frege atribuye al número cardinal.

Según Frege, una igualdad numérica es una *identidad*; como tal, es una relación entre dos objetos. Si admite la definición:

$$1+1=2$$

es más bien como definición de la suma, que como definición del número 2, a saber, que la suma de dos números sigue siendo un número. Esta idea, de que la igualdad entre magnitudes es una identidad, aparece ya, aunque incidentalmente, en la tesis [78] *venia docendi* que Frege sostuvo ante la Facultad de Jena.

«... El proceso general de la adición es el siguiente: se sustituye un grupo de cosas por una sola cosa del mismo género. Tenemos aquí una determinación del concepto de identidad de magnitudes. Si podemos decidir en cada caso si los objetos dados coinciden en una propiedad, entonces es que poseemos evidentemente el concepto exacto de esta propiedad. Así, dando las condiciones bajo las cuales hay identidad de magnitudes, determinamos al mismo tiempo el concepto de magnitud.» [79]

Definir una magnitud es, ante todo, definir las condiciones de igualdad entre magnitudes. En 1884, Frege escribe, en el mismo sentido, que el criterio de igualdad de los números proporcionará al mismo tiempo la naturaleza de los mismos.[80] De ahí el método de definición expuesto.

Esta concepción «cardinal» tiene asimismo consecuencias lógicas; éstas obligaron a Frege a revisar y a completar la

Bernays-Gödel, los números cardinales se definen a partir de los ordinales (como «ordinales iniciales») y entre los ordinales se tiene ya como primer elemento el «0» o conjunto vacío.]

[78] Métodos de cálculo fundados en una extensión del concepto grande magnitud. Véase *K.S.*, p. 50. El criterio de identidad es, para Frege, la sustitución.

[79] *K.S.*, p. 51.

[80] *Fundamentos*, cap. IV, 2.ª sección.

ideografía de 1879, con el fin de que pudiese servir para la definición del número. Si uno tiene como finalidad definir los ordinales, bajo la idea de que son los elementos primitivos de la aritmética —y ésta era la opinión de Dedekind—, la serie de los números naturales es la abstracción de lo común a todos los sistemas simplemente infinitos ordenados.[81] Partiendo de esto, los ordinales se definen como los elementos de todo sistema que tenga las propiedades discriminadas. Si se consideran como los números de la aritmética usual, es por comodidad, puesto que se llama 1 al primer elemento, sea el que sea, 2 al que le sigue, etc. La definición del número cardinal es algo completamente distinto. Una vez establecida una equinumericidad —que Frege llama también juicio de reconocimiento—, queda identificado un número, incluso si somos incapaces de asignarle un lugar en la serie de los números. Tal es el caso, por ejemplo, cuando se dice: en una sociedad monógama, el número de esposos es igual al número de esposas. Y no es que el orden sirva para definir el número, sino que, muy al contrario, es el conocimiento real de los números lo que permite definir precisamente la noción: *suceder en la serie natural de los números.*

¿Qué son estos *objetos* identificados por la igualdad numérica? No son los individuos —en el ejemplo, los esposos y las esposas. Se trata de *objetos lógicos,*[82] para expresar a los cuales interesó completar la *Begriffschrift.* Estos objetos no son objetos concretos, pero tampoco son objetos abstractos, en el sentido en que se dice esto de los universales o de los conceptos del lenguaje lógico tradicional; es a propósito de ellos como hay que interpretar la prescripción repetida de Frege, según la cual es necesario distinguir cuidadosamente los objetos de los conceptos.[83] Esta prescripción hubiera sido

[81] «*Definición:* Si en un sistema simplemente infinito ordenado por una aplicación Φ, se prescinde del carácter particular de los elementos, no conservándose más que su discernibilidad y no teniendo en cuenta más que su relación recíproca, que resulta de la aplicación; entonces estos elementos se llaman números naturales, o números ordinales, o simplemente números *(Zahlen).*» R. DEDEKIND: *op. cit.*, 73. Según la célebre crítica de Russell, esta definición es la definición de un orden; no caracteriza unívocamente los números de la aritmética, abstracta o aplicada.

[82] La expresión es de Frege y aparece en el tomo II de las *Grundgesetze.*

[83] Este principio se enuncia al final de la Introducción, p. X [p. 20 de la trad. cast.], se repite varias veces en la obra y se analiza en el artículo *Concepto y objeto.* Es una prevención contra una confusión



totalmente inútil si se hubiera tratado de individuos concretos.

Es sabido que Frege lamentó posteriormente la denominación que él mismo había tomado para su lenguaje simbólico,[84] como si en él se tratate solamente de una escritura de conceptos o contenidos conceptuales. En efecto, el análisis de la proposición requiere, además de los nombres de concepto, los nombres propios de objetos, que pueden ser —y en el caso de la aritmética lo serán siempre— objetos lógicos. Es cierto que en 1879 Frege ignoraba todavía los valores «veritativos» [85] y las extensiones de concepto. Al traducir a su lenguaje simbólico la cuaterna de las proposiciones aristotélicas, parecía aprobar la idea empirista según la cual un concepto se dice de un objeto, pero para la cual, el concepto pertenece únicamente al dominio del entendimiento, mientras que todo objeto viene dado a través de la percepción. Esta interpretación de la proposición atributiva no resistió al descubrimiento de las funciones de segundo nivel ni a la definición del número como extensión de concepto.

En resumen, la noción de *«sucesión»*, según Frege, no puede servir para la construcción lógica de la aritmética, hasta tanto no hayamos sabido definir lógicamente los objetos que satisfacen una tal relación y que la especifican como serie natural de los números. A esto se dedican los *Fundamentos* en su tarea precisa [86] de definición del número en general y de los números particulares. En este sentido, pero por un cambio inesperado, los *Fundamentos* continúan la tercera sección de la *Begriffschrift.*

natural que el propio Frege no había evitado en la *Begriffschrift,* donde se lee (9, p. 17), en el contexto de una distinción, por lo demás, notablemente aguda, entre las diferentes funciones según los argumentos que se les asocian: «"El número 2" y "todo nombre entero positivo" no son *conceptos* del mismo rango *(Begriffe gleichen Ranges).*»

[84] *Fragmento inédito,* fechado en 1919 y citado en una nota por J. van HEIJENOORT: *A Source Book,* p. 1.

[85] Esta noción aparece en la segunda ideografía, después de haber analizado Frege el «contenido de juicio» en sentido y referencia. Parece que hace mención de esto por primera vez en su conferencia de 1891: *Función y concepto.*

[86] Véase el título y el contenido del párrafo 4 de la Introducción.

Capítulo séptimo

# La unidad

El capítulo II de los *Fundamentos* agota todas las hipótesis formuladas acerca del número. Se ha querido identificar el número con una propiedad de los objetos materiales, o con una representación, subjetiva por tanto, o también con una colección [87] de objetos o de representaciones. Los defectos de estas teorías son los mismos: hacen ininteligible el uso de los grandes números —que escapan lo mismo a nuestro poder de apercepción, como a nuestro poder de representación; además son incapaces de definir el cero y el uno; finalmente, con ellas se negaría la ciencia aritmética misma, para la cual proponen un fundamento subjetivo o perceptivo.

En el tercer capítulo, Frege pasa al tercer «escollo» de las teorías aritméticas ingenuas: la definición de la unidad. Una divergencia de opiniones divide a los partidarios del número-colección: según unos, el número es un conjunto de objetos, según otros, es un conjunto de unidades. Esta última definición proviene de Euclides. Fue recogida por la tradición matemática y el lenguaje común la heredó. Esto explica la vuelta al texto euclídeo, a la paradoja de la discernibilidad de los idénticos —las unidades—, y a la aritmética vulgar que prosigue con el lenguaje usual.

Frege cita a Euclides:

*Definición 1:* La unidad es aquello según lo cual cada una de las cosas existentes se dice una.

*Definición 2:* El número es una multitud compuesta de unidades.[88]

[87] Se trata de una concepción grosera del conjunto, concebido como una colección física de elementos. Frege distingue cuidadosamente esta concepción de la cantoriana, de la cual hace el elogio más abajo y que declara ser análoga a la suya, terminología aparte. Parece que Frege se detuvo en ella por la siguiente razón: Thomae, examinado aquí, espera construir el número «dando nombres diferentes a conjuntos diferentes» (p. 38) [p. 55 de la trad. cast.]. Frege retendrá la idea de que el número se origina de una comparación entre conjuntos.

[88] EUCLIDES: *Séptimo elemento*. La versión francesa de Imbert se basa en la traducción de Jean ITARD: *Les livres arithmétiques d'Euclide.*

Ve en estas definiciones el resumen de las dudas examinadas anteriormente, puesto que, en el texto de Euclides, no podemos decidir si la unidad es el número,[89] la propiedad de una cosa (llamada «una») o la cosa en sí misma (cada una de las cosas existentes). Desde nuestro punto de vista, la definición tiene el defecto de basarse en dos doctrinas lógicas difícilmente compatibles, dos maneras de interpretar la relación entre un objeto y sus determinaciones. La paradoja es que las dos tesis son igualmente esenciales si se quiere componer el número a partir de unidades. Si se interpreta la definición según la teoría platónica,[90] la unidad o mónada tiene una existencia aparte, y la relación que mantiene con cada objeto numerado es una relación de participación. Esta existencia individual y «separada» de la mónada es necesaria si el número es la reunión de mónadas, idénticas entre sí y desprovistas de toda materia, que enturbiaría su identidad. Pero también leemos que cada objeto «se dice» *uno* según esta mónada, cuando se esperaría «es *uno*». En tal caso, la relación entre la mónada y el objeto numerado no es ya de participación, es la relación lógica —o gramatical, como se quiera— de la cualificación según una categoría. La mónada no posee entonces una existencia separada y no tenemos, en realidad, más que dos elementos: el individuo y el término numeral «uno» que lo califica. El número es una reunión de individuos, *calificados* de mónadas, y con ello se acabó la aritmética racional.

Es sabido que la aritmética fue la cruz de la lógica griega. Había que poner en su lugar el concepto (hombre por ejemplo), las unidades distinguidas por medio de este concepto (un hombre y otro hombre) y los individuos materiales subsumidos bajo este concepto (Sócrates y Coriscos). O bien se atribuye una existencia auténtica a las unidades, con lo cual dependen de la mónada y no de un concepto determinado cualquiera (hombre, por ejemplo); o bien se les niega tal existencia, pero entonces habrá que atribuir tantos unos específicamente distintos como determinaciones conceptuales hay. Para los modernos, la dificultad se enuncia: ¿cómo conjugar la discernibilidad y la diversidad de las unidades, necesarias ambas si las unidades tienen que formar el número, como los

[89] *Fundamentos*, 29, p. 39. Esta interpretación es retrospectiva. Es sabido que, para la Antigüedad clásica, *uno* no era un número.

[90] A ello inducen el término mismo de μονας y la antigüedad del comienzo del libro VII.



huevos hacen una docena, pero con su identidad si, en tanto que partes componentes del número, deben distinguirse, no obstante, de los objetos contados? Frege fue el primero en resolver la dificultad sin recurrir a la dispersión espacial o temporal, pero este fue al precio de una revolución lógica. Y, de hecho, la impotencia para analizar los actos intelectuales que rigen en la ciencia aritmética proviene de una adhesión perezosa a la lógica griega, mantenida por la tradición escolástica más allá de todo espíritu crítico.[91]

Si se quiere resolver la dificultad, la *unidad* de propiedades paradójicas debe ser distinguida del «1» de la aritmética.[92] Tal como se mostrará, éste es un objeto de la aritmética, independiente y suficiente en sí mismo. A la inversa, el término *unidad* del lenguaje común representa un concepto. Esto se ve porque admite el plural.[93] Se dice: unidades, mientras que nunca se dice: unos. Si la distinción no fuera ajena a Frege, se podría decir que el término «unidad» pertenece al metalenguaje y designa una cierta clase de conceptos que todavía no se especifica con mayor precisión.[94] La paradoja viene de la confusión entre la unidad y el uno, permitida por la ambigüedad de los lenguajes naturales. Unas veces «unidad» se emplea como un término conceptual (uno); el concepto que representa caracteriza de la misma manera a todos los objetos que subsume y de aquí proviene el hecho de que las unidades son idénticas e indivisibles. «Solamente un concepto que delimita con precisión los elementos que subsume y que no admite ninguna otra división de sus elementos, puede cons-

[91] Si se quieren resumir los obstáculos que la lógica clásica ponía a la definición lógica del número, pueden tenerse en cuenta los siguientes puntos:

*a*) Todo concepto se obtiene por abstracción a partir de objetos percibidos. Respecto a ellos tiene la función de un nombre (sinonimia o paronimia).

*b*) Todo concepto es de primer orden (en el sentido de Frege, véase más abajo).

Dos conceptos pueden tener una relación de subordinación; pero esta relación sobre la cual se basa la analítica del silogismo no altera su carácter de primer orden.

*c*) Todo juicio es una atribución.

Frege asume lo contrario de estas tres tesis.

[92] Párrafo 38, p. 49 (p. 64 de la trad. cast.).

[93] Párrafo 38, p. 50 (p. 65 de la trad. cast.).

[94] «¿... No sería lo más adecuado llamar unidad a un concepto con respecto al número que le corresponde?» *Fundamentos*, 54, p. 66 [p. 78 de la trad. cast.].

tituir una unidad para un número cardinal finito.» [95] Pero las unidades así delimitadas son indiscernibles la una de la otra. Otras veces, en cambio, el término unidad, acompañado de un artículo definido o indefinido, designa los objetos mismos, de donde resulta la discernibilidad de las unidades y su distinción real.

Esta oposición entre los dos sentidos del término «unidad» podría parecer banal, puesto que la unidad del concepto opuesta a la multiplicidad de los objetos sensibles era ya un ejercicio escolar en la Academia platónica.[96] Las observaciones que siguen muestran su precio.

1. Frege fue el primero en mostrar que una *unidad* es un concepto. No es ni la *propiedad* [97] de un concepto, ni la de un objeto —ni uno cualquiera de los objetos que se cuentan. Decir de un concepto particular (nuestro predicado) si es o no una unidad, se basa en una clasificación metalingüística. Un concepto es una unidad, en el sentido de Frege, si tiene el poder de discriminar [98] los individuos. La ideografía presenta *(darstell)* conceptos semejantes, por ejemplo: «... es idéntico a sí mismo» se escribe $\xi=\xi$, pero no existe ninguna traducción en la ideografía de la calificación «unidad». Puede preverse que el número, si bien es la reunión de unidades, tendrá una naturaleza lógica compleja, puesto que se obtiene a partir de unidades, alcanzadas, estas mismas, por intermedio de un concepto-unidad.

2. Esta relación de un (concepto) a varios (individuos discretos) no caracteriza todos los conceptos, sino precisamente a aquellos que se denominan «unidad».

3. Finalmente, Frege denuncia la falsa noción de «nombre común», que embarazaba a la lógica (o gramática) contemporánea. Todo nombre, si verdaderamente lo es, es un *nombre propio* y designa efectivamente un *objeto*. Un término conceptual *(Begriffswort)* no designa ningún objeto y no podría ser un nombre; designa un concepto.[99]

[95] *Fundamentos*, 54 *in fine*.

[96] Véase, entre otros, el *Filebo*, 14 ss.

[97] Pero se dirá que un concepto tiene como propiedad la *unicidad* si subsume un solo individuo. Véase más abajo y *Fundamentos*, 53, p. 65 [p. 77 de la trad. cast.].

[98] En lo cual se distingue de los conceptos que expresan una cualidad, por ejemplo «ser rojo». Para esclarecer esta sutil distinción, cuya utilidad aparecerá más adelante, puede recordarse una particularidad de la lengua latina, que opone, con una intención análoga a la de Frege, *pauci milites* a *paulum aquae*. «Ser un soldado» es un *concepto unidad*, pero no «ser agua».



Estos párrafos sobre la unidad contienen, como se ve, una doctrina del concepto en ruptura con la tradición, en sí misma bastante complicada; sus consecuencias filosóficas y lógicas son la mayor aportación de los *Fundamentos*. La definición del número es la consecuencia directa de esto; por ello vamos a resumir los elementos de esta doctrina presentada de manera informal en la última sección del capítulo III.

[99] *Fundamentos*, 47, p. 60 [p. 73 de la trad. cast.] y 38, pp. 49-50 [p. 64 de la trad. cast.].

Capítulo octavo

# Naturaleza del concepto, primero y segundo orden (nivel)

Un concepto es una suma de características determinantes [100] que describen[101] las *propiedades* de los objetos que el concepto subsuma. Por ejemplo, «rectángulo» es una característica determinante del concepto «triángulo rectángulo». Dado que expresa en un grupo finito de características una o más propiedades comunes a un número, tan grande como se quiera, de individuos, tiene un poder unificador muy superior al de la apercepción.[102]

También el concepto tiene *propiedades*.[103] Todo concepto tiene una extensión y esta extensión puede ser o no vacía. En este último caso, se dice que un objeto cae bajo el concepto o que existe un individuo tal que [104]... «A este respecto, la existencia es análoga al número. Afirmar la existencia no es otra cosa que negar el número 0.» [105] Si se dice que de la carroza del rey tiran cuatro caballos, se atribuye el número cuatro al concepto «caballo que tira de la carroza del rey».

[100] Párrafo 53, p. 64 [p. 77 de la trad. cast.]: «Los caracteres que constituyen el concepto.»

[101] Nos parece que el término exacto lo debemos tomar del lenguaje de Wittgenstein: hay una relación de *figuración* entre los caracteres de los conceptos y las propiedades de los objetos. Wittgenstein, es cierto, emplea el término en un sentido distinto.

[102] *Fundamentos*, 48, p. 64 [p. 74 de la trad. cast.].

[103] *Ibid.*, 53 p. 64 [p. 77 de la trad. cast.].

[104] «Un objeto», «un individuo» deben ser comprendidos en el sentido de: «por lo menos uno». Se traduce así la proposición particular indeterminada.

[105] Obsérvese, no obstante, la siguiente diferencia, que el texto no formalizado de los *Fundamentos* (párrafo 53) deja en la penumbra: si la existencia es una *función* de segundo orden, el número es la extensión de una tal función, es un objeto. Véase *Grundgesetze*, I, 30 (en esa obra, Frege prefirió «segundo nivel» a «segundo orden»). Esta diferencia es patente a partir del momento en que se utiliza una escritura simbólica. En el párrafo 57 de los *Fundamentos*, Frege señala, por lo demás, el límite de la analogía: «... Por esto he evitado calificar a un número tal como 0, 1 ó 2, de *propiedad* de un concepto.»

Las propiedades de un concepto, tales como: tener una extensión no vacía, tener la misma extensión que otro concepto, procuran materia para formar nuevos conceptos, en la medida en que los constituyen en cuanto características determinantes. Así se ponen en evidencia conceptos de segundo orden,[106] que no se podrían obtener por la vía tradicional, la abstracción a partir de objetos sensibles.

Las características de un concepto describen la naturaleza de los objetos que el concepto podría subsumir, al especificar las propiedades de tales objetos, pero no dicen nada sobre la existencia de estos objetos. Si bien es necesaria la relación entre las propiedades de los objetos [107] subsumidos por un concepto y las características de este concepto, las propiedades del concepto, en cambio, son independientes, en el caso general, de las características determinantes que constituyen el concepto. Puede decirse que el vicio de la prueba ontológica consiste en no haber distinguido entre las características y las propiedades de un concepto.[108] En efecto, introduce entre las características constitutivas del concepto «Dios» la supuesta propiedad de subsumir un individuo y uno solo.[109] Ahora bien, la unicidad es propiedad de un concepto de primer orden, y característica de un concepto de segundo orden. Pero no es ni propiedad de individuo ni característica de primer orden.

Si se tienen en cuenta estos dos factores, las *propiedades* y las *características* de los conceptos, nos veremos llevados a distinguir tres tipos de conceptos:

1. Puede ocurrir que la propiedad descrita por la característica del concepto no sea individualizante. Con esto se quiere decir que la reunión de dos o más objetos que poseen esta propiedad también la posee. Frege pone el ejemplo del concepto «... es rojo».[110] Esta parte de la alfombra y esta otra parte son rojas, y su reunión lo sigue siendo. Tales conceptos no satisfacen el requisito de la delimitación estricta,[111] en virtud del cual debe poderse decir para todo individuo si cae o no bajo el concepto considerado. En nuestro ejemplo, parece que se pueda calificar de «roja» cada parte de la alfombra, todo conjunto de estas partes y la alfombra misma entera. Pero si uno se atiene firmemente a ese otro principio de que hay que distinguir un elemento del conjunto al cual pertenece, se verá obligado a reservar la denominación «rojo», ya sea a la alfombra, ya sea a las partes de la alfombra, pero de manera puramente arbitraria. A tales conceptos [112] no se les puede atribuir ningún número, su extensión no está determinada cardinalmente, no constituyen unidades, y por el hecho de que infringen el principio de la delimitación estricta, ya no serán considerados por Frege. Son conceptos en el sentido trivial del término, pero no en el sentido preciso en que un concepto es un predicado definido sobre una colección de individuos discretos.

2. A continuación está el caso en que la propiedad reflejada y descrita por la característica del concepto individualiza lo que el concepto subsume. Este caso es el más común; Frege pone el ejemplo siguiente: [113] dado el concepto «...es una letra de la palabra *Zhal* (número); este concepto separa e individualiza la *Z* de la *a*, de la *h* y de la *l*». Podría decirse que este concepto establece una correspondencia entre una proposición verdadera, por una parte: «*a* es una letra de la palabra *Zahl*» y, por otra, con cada uno de los objetos que tienen la propiedad considerada. Esta sugerencia del texto tomará forma en el artículo *Función y concepto*, en el que Frege identifica un concepto con una función que tendría por valor veritativo lo verdadero (o lo falso), y por dominio de verdad la extensión de este concepto. Los conceptos que Frege califica de unidades especifican la correspondencia existente entre lo verdadero y cada uno de los objetos. En el caso general, no hay

[106] *Fundamentos*, 53 *in fine*.

[107] La necesidad de esta relación da lugar a la ley lógica fundamental (ley V de las *Grundgesetze*) que permite identificar las extensiones si los casos de verdad de los conceptos son los mismos. Véase más abajo.

[108] *Fundamentos*, 53 p. 65 [p. 77 de la trad. cast.].

[109] Cuando Kant afirma que no se puede inferir la existencia de la esencia, constata en otros términos que una lógica reducida a conceptos de primer nivel no podría tratar la existencia. Ésta se reserva, en el sistema kantiano, a la percepción.

[110] *Fundamentos*, 54, p. 66 [p. 78 de la trad. cast.].

[111] *Fundamentos*, 74, p. 87 [p. 98 de la trad. cast.]. Frege repite frecuentemente este principio: caracteriza el concepto a falta de una definición, la cual es imposible puesto que se trata de una noción fundamental. Véase el artículo *Función y concepto*, y las *Grundgesetze*, t. II, p. 69, donde el principio es denominado *Grundsatz der Vollständigkeit*.

[112] Corrientemente, se les llama cualidades. Estas «cualidades» de la lógica aristotélica son incapaces de individualizar a su portador, a diferencia de las sustancias segundas o especies. Por ello tienen el papel limitado de «diferencia». Aristóteles critica a Platón por haber querido clasificar a los individuos empezando la dicotomía por tales cualidades.

[113] *Fundamentos*, 54, p. 66 [p. 78 de la trad. cast.].

ningún vínculo entre las características de un tal concepto y sus propiedades. Por ejemplo, el conjunto de las características constitutivas del concepto «ballena» no da ninguna indicación sobre la existencia de ballenas. Pero a veces es posible inferir propiedades a partir de características. Sea el concepto «... no idéntico a sí mismo»; al examinar la característica constitutiva de este concepto se llegará a la conclusión de que ningún objeto tiene esta propiedad, su extensión es vacía.

3. Si a veces es posible atribuir a varios conceptos una propiedad que les sea común, estos conceptos serán reunidos bajo un concepto de orden superior, cuya característica determinante corresponde a la propiedad en cuestión. «Si se reúnen bajo un mismo concepto todos los conceptos bajo los cuales cae un solo objeto, la unicidad será característica de este último concepto formado. Bajo él caerá, por ejemplo, el concepto «luna de la Tierra», pero no el cuerpo celeste de este nombre (la Luna). De este modo, puede someterse un concepto a otro concepto más elevado, de segundo orden, si se puede decir. Pero no hay que confundir esta relación con la subordinación de conceptos.» [114]

Se observará que, en el ejemplo escogido por Frege, la propiedad de segundo orden considerada reúne conceptos que tienen una extensión numéricamente idéntica, es decir, asociables de manera biunívoca. Con todo, este carácter ha sido determinado empíricamente, constatando que la Tierra no tiene efectivamente más que un satélite. En el caso del concepto «...no idéntico a sí mismo», se le puede atribuir a priori, utilizando una especie de prueba ontológica al revés, el número cero y subsumirlo a un concepto de segundo orden constituido por esta característica. El procedimiento es, entonces, puramente lógico.

En lo que sigue, Frege utiliza únicamente los conceptos pertenecientes a los dos últimos tipos examinados: los que subsumen objetos distintos, comúnmente llamados *especies* y Frege califica de *unidades*,[115] y los conceptos de orden superior. Estos últimos son necesarios para definir los objetos y funciones de la aritmética, y son suficientes también. Pero este poder radica enteramente en los recursos de expresión que ellos proporcionan al lenguaje de la ideografía. Son el instrumento esencial de la característica —si se entiende por ésta la representación de los contenidos lógicos— y de la parte de la lógica de la que Frege es creador indiscutido: la teoría de la cuantificación.

[114] *Fundamentos*, 53 *in fine*.
[115] *Ibid.*, 54, p. 66 [p. 78 de la trad. cast.].



En lo esencial, esta teoría la procuró la *Begriffschrift*. La primera intención de Frege era la expresión de la generalización (apartados 11 y 12). Una vez analizado el contenido de juicio en función y argumento, Frege distingue el caso en que una función es satisfecha por uno o varios argumentos todavía no especificados, del caso en que es satisfecha por todos los argumentos.[116] Combinando el signo de negación con la simbolización de la generalización se obtiene la transcripción en la ideografía de las proposiciones universales y particulares de la lógica clásica. La regla de generalización está materialmente contenida en los preceptos que regulan el empleo de letras góticas e itálicas, y la instanciación viene regulada por la proposición 58. Sin embargo, no se dio entonces justificación alguna de estos signos y reglas, si se excluye la aparente justificación con que era aplicada a la cuaterna de las proposiciones aristotélicas (apartado 12).

A partir del momento en que nos damos cuenta de la afinidad del número cardinal y de la existencia, la cuantificación encuentra su lugar en el interior de una teoría general de las funciones, jerarquizada en niveles, cuyo fundamento es el análisis extensional del concepto. Esta teoría aparece expuesta en la primera ideografía, pero su sustancia, sobre la cual se basa la construcción del número, viene dada sucintamente en la IV parte de los *Fundamentos*.

La notación para la generalización es, en la segunda ideografía, un signo primitivo cuya necesidad se muestra en el lenguaje mismo. Los algebristas, por su parte, tienen la costumbre de enunciar la generalización por medio de letras. Así:

(1) $$a+b=b+a$$

enuncia la conmutatividad de la adición para todo número $a$ y $b$. Pero se ve que este simbolismo es ambiguo a partir del momento en que se somete la fórmula (1) a la negación, o sea:

(2) $$(a+b=b+a).$$

[116] Puede detectarse aquí el uso de la variable libre y de la variable ligada. A Frege le repugna emplear el término «variable», que sugiere la imagen de una variación; esta imagen parece confundir la indeterminación de la letra itálica con la pluralidad de los objetos a los cuales puede ser asignada.

¿Se ha escrito acaso la negación de una generalización (no para todo número *a* y *b* resulta que...) o bien la generalización de una negación (sean cuales sean los números *a* y *b*, nunca resulta...)? La primera función, bien evidente, de la notación para la generalización es la de suprimir el equívoco. Además, el párrafo 9 de las *Leyes fundamentales* introduce un uso distinto, e igualmente importante, de esa simbolización, que permite construir una notación especial para la extensión de concepto. La generalización de una identidad entre los valores de dos funciones enuncia, contextualmente, la identidad del *recorrido* de estas funciones;[117] la ley V se limita a establecer como ley fundamental de la ideografía la sinonimia de estas dos notaciones.

Otras consideraciones más vienen a completar, en el apartado 21, la introducción de la notación para la generalización. Sea una fórmula tal como

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \varphi(\mathfrak{a})$$

Frege ve en esto el ejemplo más simple de una función de segundo orden. Esta fórmula enuncia que la función $\varphi$ es satisfecha para todo argumento, o sea, que el concepto $\varphi$ tiene una extensión universal.

La función $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \varphi(\mathfrak{a})$ es una función de segundo orden en que la letra griega es una variable sintáctica, que indica el lugar y el tipo del argumento —en este caso una función de primer orden con un argumento. En cuanto a la función de segundo orden, es una constante «que enuncia algo de un concepto». Esta descripción sintáctica de la cuantificación reproduce, aunque con más rigor, el análisis de los *Fundamentos* y precisa al mismo tiempo la naturaleza de la extensión de conceptos. Bajo este punto de vista, la ley V enuncia que, dados dos conceptos *F* y *G* definidos sobre la misma colección, si para todo punto de partida de las aplicaciones *f* y *g*, los puntos de llegada coinciden, entonces se ha definido una aplicación del conjunto de partida sobre sí mismo, a saber, la aplicación idéntica. En efecto, la intersección recíproca del grafo de estas funciones [118] por el punto verdadero es la misma

[117] En el caso en que estas funciones son conceptos, sus valores son valores veritativos y sus «recorridos» son las extensiones de estos conceptos. [Hemos traducido por «recorrido», siguiendo el uso establecido en otros lugares, el término fregeano «*Wertverlauf*», que Imbert traduce por «parcours de valeurs» («curso de valores»). *(N. del T.)*]

[118] Lo que Frege llama *Wahrheitsverlauf*.



para las dos funciones. El resultado podría parecer de poco interés, pero hay que observar que la aplicación idéntica de una clase de objetos sobre sí misma es la operación por medio de la cual se pasa de la colección en el sentido material al *conjunto en sentido abstracto*, si nos adherimos a las concepciones de Frege.

La primera ideografía, inspirada en el lenguaje común, del que era una purificación, usaba la cuantificación para traducir la cuaterna aristotélica. Pero la segunda ideografía impone sus posibilidades de expresión y sus giros como un instrumento de pensamiento autónomo. Caracteriza objetos —las extensiones de concepto— y funciones —las de orden superior— que el lenguaje común es definitivamente incapaz de distinguir. Además, se basa en una sintaxis no más refinada que la sintaxis de las lenguas naturales, sino, por el contrario, irremediablemente ajena a ellas. Su originalidad reside en el hecho de que la noción esencial de la lógica fregeana es la *aplicación*;[119] y todas las entidades sintácticas se introducen sucesivamente, ya sea para precisar el dominio y la imagen de las funciones, ya sea la naturaleza y el nivel de las funciones. Sobre esta noción primitiva, que Frege no establece como tal, pero que *muestra* en las ocho funciones primitivas necesarias al lenguaje de la ideografía, se basa la unidad de la lógica y la aritmética.

La IV parte de los *Fundamentos* elabora la definición del número cardinal con un tratamiento riguroso de la idea que «la asignación de un número es un enunciado que se refiere a un concepto». Pone en juego las funciones y las leyes de la ideografía, de las cuales el lenguaje natural no posee ningún equivalente exacto. Por ello el estilo toma un aspecto pedregoso, los giros son insólitos y el vocabulario se carga de neologismos. La violencia hecha al lenguaje natural sólo se hace soportable mediante un artificio, el recurso frecuente al metalenguaje para sugerir de alguna manera desde el exterior lo que la sintaxis natural es incapaz de hacer ver.

[119] Se atribuye a Dedekind la primera formulación de esta noción en el ensayo *Was sind und was sollen die Zahlen* y a Peano el análisis apresurado de la noción general de función (Bourbaki, p. 21). Es cierto que el término *Bildung* no es empleado por Frege antes de las *Leyes fundamentales*. Pero la noción, en su realidad lógica y en sus múltiples casos específicos, se halla presente ya en los *Fundamentos*. Véase el apéndice 2 sobre la lógica de Frege.

Capítulo noveno

# Del concepto al número

Un número corresponde a un concepto. Frege saca provecho de esta primera evidencia y propone definir cada número en particular [120] siguiendo el ejemplo:

0 es el número que corresponde a un concepto bajo el cual nada cae.

No obstante, la expresión «número que corresponde a un concepto» constituye un todo en el que el término *número*, cuyo sentido se supone conocido, figura contextualmente; no se podría lograr una noción clara de 0. Más generalmente, un tal esbozo de definición no permite decidir si un objeto cualquiera es un número, [121] ni siquiera identificar dos números iguales. Ahora bien, éste es justamente, según se suele admitir, el problema aritmético más corriente.

En una primera lectura, parecerá que Frege levanta contra sí mismo objeciones poco naturales. La razón común a estas objeciones es la intención de definir el número solamente a partir de las reglas y recursos de la ideografía y de alcanzar, al término de esta definición, la *característica* aritmética.

Una igualdad aritmética es una identidad. Enuncia una relación entre dos objetos representados ambos por un signo simple, interpretado como un nombre propio de objeto. Así, pues, la primera tarea consiste en mostrar que el número es un objeto, aunque sea alcanzado por medio de un concepto. La tarea consiste en construir un nombre propio del número en el que no figure ningún elemento contextual ni ningún elemento indeterminado. A continuación será fácil reemplazar esta definición *(Erklärung)* del número por un signo simple y convencional, por medio de una definición nominal *(Defini-*

[120] *Fundamentos*, 57, p. 69 [p. 82 de la trad. cast.].

[121] *Ibid.*, p. 82 de la trad. cast.: «...nunca podremos decidir —para dar un ejemplo burdo— si a un concepto le corresponde el número Julio César...»

*tion)*.[122] Si nos repugna admitir que el número sea un objeto,[123] porque no da materia para ninguna representación ni localización, Frege refuta la objeción denunciando la semántica ingenua que la inspira. El estatuto de objeto es un estatuto lógico, que se desprende estrictamente de la teoría de las denotaciones.[124] Si un nombre propio complejo está formado de nombres propios simples provistos de referencia, este nombre complejo estará también provisto de referencia. Pero dada la ausencia de una ideografía, Frege tiene que defender aquí mediante la argumentación lo que implica la característica lógica. Si el número es un objeto como el Mar del Norte,[125] no se trata de una metáfora ni de realismo pitagórico, sino que hay verdadera identidad entre el estatuto del Mar del Norte en las proposiciones del geógrafo y el estatuto del número en los tratados de aritmética.

La segunda dificultad presentada por Frege es la oscuridad de la expresión «número que corresponde a un concepto». El lenguaje natural indica la relación del concepto con el número por medio de una consideración, en cierta manera metalingüística, enmascarada por un vocabulario homogéneo. Pero si la construcción del número tiene que ser efectiva, es necesario renunciar a las astucias del lenguaje natural y que el paso del concepto al número se opere en el lenguaje-objeto por medio de una ley fundamental. Esta ley, formulada explícitamente en las *Grundgesetze*, autoriza a pasar de una identidad [126] entre conceptos a la identidad de su extensión. Permite definir un objeto lógico según un procedimiento que se ha hecho clásico en Teoría de conjuntos,[127] pero que en la época en que Frege compuso los *Fundamentos* aún no había sido identificado. Por ello Frege analiza primero este procedimiento de definición, siguiendo un ejemplo familiar a los geómetras, que justifica, generaliza y aplica finalmente a la definición del número. El ejemplo escogido (apartados 64 a 68) es

122 Véase *Grundgesetze*, I, 27 ss.
123 *Fundamentos*, 61, p. 72 [p. 85 de la trad. cast.].
124 *Grundgesetze*, I, 31 y 33. Hoy se diría que se desprende de la relación de un lenguaje a su modelo.
125 *Fundamentos*, 26, p. 34 [p. 52 de la trad. cast.].
126 Si es que se puede hablar de identidad para conceptos. Hablando estrictamente, se dirá que dos conceptos coinciden *(zusammenfallen)*, si, para todo argumento, su valor veritativo es el mismo. Véase reseña de la *Philosophie der Arithmetik de E. Husserl, K.S.*, p. 184 y la nota.
127 Es la definición de elemento de un conjunto cociente. Véase más abajo.



la definición de dirección de una recta a partir de una colección de rectas paralelas entre sí. Se dirá que:

1. Si, y solamente si, la recta *a* es paralela a la recta *b*, la dirección de la recta *a* es idéntica a la dirección de la recta *b*.

El sentido de esta definición es obvio, pero no parece que su naturaleza fuera analizada antes de Frege. Éste observa, en efecto, que algunos geómetras proceden a la inversa y definen las rectas paralelas por la propiedad de poseer la misma dirección. En tal caso, la demostración de que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí es inmediata.[128] ¿Pero se sabe de antemano lo que es la dirección de una recta? Muy al contrario, hay que definir esta noción a partir de lo que es dado, es decir las rectas paralelas, que se ofrecen a la intuición del geómetra.[129] La dirección de una recta, lo mismo que el número de un concepto, es aquello hacia lo cual nos dirigimos, es el resultado de una construcción lógica.

Frege examina a continuación el contenido de los dos enunciados que figuran en la definición de la dirección de una recta y el paso de un enunciado al otro (65). Siguiendo el espíritu del lenguaje común, podría dudarse de que la segunda proposición de la fórmula [(1)] sea efectivamente una definición de la dirección de una recta. Parecería más bien que el término definido, aquel en el que se insiste, sea «... es idéntica a...». A lo cual Frege responde dando las reglas de interpretación de este enunciado. En primer lugar, conviene invertir las sugerencias del lenguaje y leer esta proposición como una identidad —noción conocida— entre dos términos, hasta el momento desconocidos. La identidad es una relación definida por la fórmula lebniziana:

*Eadem sunt qui substitui possunt salva veritate.*

Se define, pues, no sobre objetos, sino sobre descripciones de objeto. Con ello se indica que dos descripciones se aplican al mismo objeto.[130] Lo que todavía falta por ver claramente es

128 Según la noción común de Euclides: dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
129 Frege siguió fiel a Kant en este punto: la geometría es la ciencia de las relaciones dadas en la intuición pura del espacio.
130 En la *Begriffschrift*, la identidad es una relación entre *nombres* de objetos. El artículo *Sentido y referencia*, posterior a los *Fundamentos* corrige la *Begriffschrift* y define la identidad como una relación entre dos *sentidos* diferentes dotados de la misma referencia. Lo esencial para nuestro propósito es que no sea una relación entre objetos, y por

cómo una identidad entre dos términos igualmente desconocidos podría servir para su definición. La solución es considerar esta identidad, enunciada en la segunda proposición de la fórmula [(1)], al mismo tiempo que la sinonimia postulada entre las dos proposiciones de la fórmula [(1)]. Haciendo esto, el sentido de la primera es transferido a la segunda y repartido entre los términos desconocidos. La finalidad de esta exégesis, que discurre en dos páginas, es la de obligarnos a leer la definición [(1)] renunciando a las sugerencias del lenguaje hablado, en favor de la severa univocidad de la traducción a la ideografía de esta fórmula. Además, impone al lector la conjunción de operaciones (sinonimia proposicional, identidad entre objetos), que la doble dimensión del simbolismo fregeano tiene la capacidad de mostrar simultáneamente.

La tercera objeción renueva las dudas ya formuladas a propósito del primer ensayo de definición del número. Se ha construido efectivamente una identificación (Frege dice reconocimiento: *Wiedererkennung*) de la dirección de *a* o de la dirección de *b*, pero falta un criterio para decidir si tal objeto es una dirección de recta. Con el fin de llenar esta laguna, Frege propone, y es la última etapa de la definición:

2. La dirección de la recta *a* es la extensión del concepto «... paralela a la recta *a*».

Este último paso es abrupto y disimula, en verdad, tres distintas etapas. La primera es la construcción de un concepto cuya extensión se dice que es la recta *a*. Hay que disponer de una relación de equivalencia que, si se satura parcialmente su enunciado por medio de un parámetro [131] ( la recta *a*), da lugar a un concepto. El criterio de que habla Frege es precisamente poner de manifiesto una tal relación de equivalencia, en este caso el paralelismo. La segunda etapa es el paso de un concepto a su extensión, es decir, la saturación de una función de segundo orden [132] por medio de un argumento de primer orden. La tercera, en fin, es la definición nominal a través de la cual se postula que la dirección de la recta *a* sea el

eso hemos escogido el término neutral de *descripción.* Se observará que la fórmula latina, tomada literalmente, apoya la interpretación de Frege, sin que se le pueda atribuir con la misma seguridad a Leibniz.

131 Este parámetro tiene el papel de representante de la clase de equivalencia.

132 Véase apéndice 2.



valor de la función antes construida: extensión del concepto «... paralela a la recta *a*».

Es notable que Frege no dé aquí ninguna interpretación de su fórmula, como si ésta debiera gozar de una certidumbre inmediata rebelde al análisis. Esta apelación al sentido común atestigua una oscuridad que pesa sobre la extensión de concepto, que el párrafo siguiente se esfuerza por eliminar, aunque sin conseguirlo totalmente.

Se obtiene la definición del número sustituyendo en [(2)] a las rectas por conceptos, y al paralelismo por la aplicación biyectiva entre conceptos.

La definición se enuncia:

El número del concepto F es la extensión del concepto: «... equinumérico al concepto F».

Consciente de lo insólito de esta definición, Frege creyó necesario justificar el recurso a las extensiones de concepto. Lo hizo en un apartado (69) denso y oscuro, al cual añade una nota que, en rigor, se podrían dejar de mencionar explícitamente las extensiones, puesto que éstas están estrechamente ligadas a los conceptos mismos.[133] Que se pueda pasar de un concepto a su extensión y tratar a ésta como a un objeto son condiciones necesarias para la construcción del número y para la ideografía en general. No obstante, Frege no pudo dar jamás una determinación de la extensión que le satisficiese. Por eso hay que tratar de esclarecerla a través de su relación con las demás nociones de la ideografía, y del papel muy preciso que Frege le hace jugar en los *Fundamentos* y en las *Leyes fundamentales.*

En el párrafo 69, la extensión de concepto viene dada como una noción familiar, [134] que basta caracterizar por medio de dos propiedades esenciales. Dos extensiones de concepto son o bien iguales, [135] o bien una es más amplia que la otra. Puede admitirse que Frege ignora voluntariamente el tercer caso,

133 *Las leyes fundamentales* tienen un signo particular para la extensión de concepto. Se escogió de manera que con él pueda saberse cuál es el concepto determinado del que proviene la extensión (véase apéndice 2). De esta forma se infiere que el concepto es a la vez pensado y definido extensionalmente por Frege.

134 Esta noción es conocida de todos, asegura Frege, y supuesta por la lógica de Leibniz y de Boole; es suficiente tomarla en su sentido estricto. No puede negarse que Frege fuese consciente, a pesar de ello, de la originalidad de su interpretación; pero no cabe duda de que quería romper el aislamiento del que había sido víctima desde la *Begriffschrift* y reivindicar la tradición leibniziana.

135 En el sentido de idénticas *(gleich).*

desprovisto de interés, en que no tendrían ninguna relación. La primera relación se ilustra con la identidad numérica, o con la identidad de una dirección. En efecto, la proposición:

> la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*» es idéntica a la extensión del concepto «equinumérico al concepto *G*»

es verdadera si —y sólo si— la proposición:

> al concepto *F* le corresponde el mismo número que al concepto *G*, también lo es.

El otro caso corresponde a la subordinación de conceptos. Estas precisiones no son evidentes, pues no se ve claro cómo concebir una relación de inclusión entre extensiones de concepto que son números. Frege da un rodeo a la dificultad mediante dos observaciones. En primer lugar, el caso en que un número fuera más amplio que otro número no puede presentarse,[136] puesto que la proposición que enuncia una equinumericidad entre conceptos vale en ambos sentidos. Por otra parte, si alguna vez se presentase el caso en que el concepto «...equinumérico al concepto *F*» estuviese subordinado a un concepto superior, podríamos resolverlo mediante una estipulación particular. Hay que reconocer que la oscuridad sigue sin disiparse. ¿Cómo podría existir la relación de inclusión entre un número, que es un objeto, y una extensión de conceptos, si esta relación se excluye a priori entre dos números —o dos direcciones? De nada serviría añadir que una identidad puede concebirse como una inclusión recíproca, pues, en tal caso, una inclusión no recíproca se confundiría con una relación de orden sobre los números, lo cual Frege rechaza con razón.[137] Parece como si Frege, tratando de discernir una noción para la cual el vocabulario todavía no estaba fijado, tuviese dificultades en distinguir entre la extensión de concepto, en tanto que es una clase de equivalencia que puede ser incluida dentro de otra clase más amplia, y esta misma clase, en tanto que es un elemento, una *unidad*, para emplear los términos de Frege, en el conjunto cociente. De ahí las precau-

[136] *Fundamentos*, 69, p. [p. 92 de la trad. cast.].
[137] *Fundamentos*, 69: «Este "abarca más" no debe confundirse, naturalmente, con el "mayor que", que se da en los números.»



ciones de lenguaje y las numerosas vueltas alrededor de la noción de extensión de concepto.

La nota añadida al párrafo 69, que se anticipa a las objeciones[138] que podrían suscitarse respecto de la extensión de concepto, afirma la dependencia muy estrecha[139] de ésta respecto del concepto del que emana. En cuanto al concepto, es una noción admitida por todos los lógicos y cuya naturaleza fue precisada por la *Begriffschrift*.[140] Finalmente, cada concepto está sometido al criterio de la delimitación estricta. Si la extensión le está estrechamente unida, debe gozar del mismo crédito. De esta nota de Frege quedará en pie la regla según la cual el concepto es anterior a su extensión; pero también es una advertencia en contra de la interpretación que asimilaría la extensión, realidad lógica, al conjunto material de los objetos que caen bajo el concepto.

Sin poner en duda la prioridad del concepto sobre la extensión, las *Leyes fundamentales* tratan a ésta como a una noción primitiva, por ser indefinible. Le atribuyen un signo distintivo, utilizado en la definición de signos introducidos ulteriormente.[141] No obstante, difiere de las demás nociones fundamentales en dos aspectos. En primer lugar, como se ha visto, el signo general de una extensión de concepto es el de una función de segundo orden, que da lugar a un nombre propio cuando se introduce en lugar del argumento el nombre propio de una función de primer orden con un argumento. En esto, la función extensión sería comparable a la constante de segundo orden correspondiente a la cuantificación. Pero se distingue de ésta sintácticamente porque la función sustituida como argumento hace las veces de un parámetro, determinando en cada caso de qué extensión de concepto se trata. Es un operador más que una función lógica. En segun-

[138] *Fundamentos*, 107, p. 117 [p. 124 de la trad. cast.]: «Suponemos conocido el sentido de la expresión "extensión del concepto". Este modo de superar la dificultad no será aprobado, sin duda, por todo el mundo...»
[139] Hasta el punto que, según Frege, debería poderse evitar el darle un signo particular.
[140] Como se ha visto, el concepto se asimila a un enunciado que comporta una variable libre.
[141] A saber: la función que Church llama operador de descripción y que corresponde a uno de los usos del artículo definido del lenguaje natural (párrafo 11), y la función que asocia el argumento de un concepto a la extensión de este concepto (párrafo 34). Por otra parte, sirve para definir la extensión de una relación (párrafo 36). Finalmente, posibilita la enunciación de la ley V (párrafo 47).

do lugar, siendo la extensión un objeto para cada nueva función de primer orden, es necesario ver si cuando sirve de argumento a la operación extensión, se obtiene efectivamente un nombre provisto de referencia; por lo demás, hay que verificar el valor que adquieren todas las funciones introducidas precedentemente cuando se les da esta nueva extensión por argumento.[142] Estas restricciones y prudencias que entorpecen el empleo de la extensión de concepto, hacen ver que la ambigüedad antes señalada no ha sido eliminada. La primera exigencia es la de que a todo concepto se le pueda asociar una extensión, aunque sea la clase vacía. El segundo requisito exige que, para toda extensión de concepto tomada como argumento, una función cualquiera de primer orden tenga un valor veritativo. En el primer caso, la extensión de concepto es tratada como una *clase*, en el segundo caso es tratada como un *individuo*. ¿Bajo qué condiciones es legítimo este doble punto de vista? Hay que buscarlas en la práctica misma de Frege, puesto que sus explicaciones son insuficientes.

En el ejemplo geométrico analizado por Frege se reconoce fácilmente la determinación de la dirección de una recta a partir de la clase de equivalencia de las rectas paralelas a una recta dada. Una relación de equivalencia, definida sobre un conjunto E no vacío, divide este conjunto en una clase de conjuntos disjuntos. El cociente de este conjunto E por la relación de equivalencia es el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia, es decir, subconjuntos disjuntos de E. Se denomina epiyección canónica la aplicación que a todo elemento de E le asigna su clase de equivalencia.[143] En los dos casos examinados por Frege, esta aplicación asocia a toda recta del plano (o a todo concepto) su dirección (o su número). Por ello es legítimo hablar de *la* dirección de la recta *a*, o de... el número del concepto *F*.

Al no contar con una teoría simple de conjuntos, por medio de la cual este procedimiento puede exponerse hoy día sencillamente, Frege definió el número con los recursos de la ideografía. El criterio de identidad de los números es la equinumericidad de los conceptos: dos números son idénticos si —y sólo si— los conceptos a los que corresponden son equinuméricos. Dado que la relación de equinumericidad divide el conjunto de los conceptos considerados en clases

[142] *Grundgesetze*, I, 10 y 32.
[143] Véase, por ejemplo, M. Queysanne: *Algèbre*, 18, p. 43.



disjuntas, Frege puede decir con razón (apartado 69) que un número es idéntico a otro número o diferente. Hay que entender por ello que las clases de conceptos equinuméricos o bien coinciden o bien son disjuntas —hemos visto que Frege no menciona este último caso. Pero la identidad de los números que se desprende de la proposición:

> la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*» es la misma que la extensión del concepto «equinumérico al concepto *G*» si, y sólo si, los conceptos *F* y *G* tienen el mismo número,[144]

es una relación definida sobre el conjunto cociente. La inclusión de clases se infiere de una consideración completamente distinta. Una clase puede estar comprendida dentro de otra clase, pero esta relación difiere de la precedente y no está definida sobre el conjunto cociente. Está definida sobre el conjunto inicial por medio de un enunciado del tipo:

> todo objeto que cae bajo el concepto *F* cae bajo el concepto *G*.

En consecuencia, si el número, en tanto que objeto, es elemento del conjunto cociente, no podría estar *incluido* en una clase definida sobre el conjunto inicial. La ambigüedad señalada proviene del hecho de que Frege no tiene ningún medio, ni en el lenguaje común ni en la ideografía, para distinguir la extensión de concepto, en tanto que es una clase de equivalencia, del elemento correspondiente definido sobre el conjunto cociente. Hay que pensar que Frege no tenía sino una sensación imprecisa de esta diferencia, cuando la ideografía, inventada para representar las articulaciones conceptuales que el lenguaje ignora, no pudo evitar esta deficiencia.

A primera vista puede parecer que se trata del mismo objeto; esta ilusión desaparece si se observa que no dan lugar a las mismas operaciones.[145] Además, la relación que vincula un elemento *a* con la clase de equivalencia *A* es la relación de pertenencia. Esta relación no es funcional, puesto que este mismo elemento *a* posee la relación de pertenencia con cualquier otra clase, salvo la clase vacía, comprendida

[144] *Fundamentos*, 69, p. 80 [p. 92 de la trad. cast.].
[145] Es evidente que las operaciones unión, intersección y producto se definen sobre las clases, pero no sobre individuos del conjunto cociente.

en *A* o en la cual *A* esté comprendida. A la inversa, la relación que asocia *a* y el elemento del conjunto cociente es una epiyección, llamada epiyección canónica.[146]

[146] Esta ambigüedad es poco molesta en los *Fundamentos;* sigue siendo soportable en el texto de las *Leyes fundamentales,* donde es sin duda la responsable de las vueltas que da Frege alrededor de la noción de extensión de concepto: véase el título del párrafo 10: *Precisiones concernientes a la extensión de concepto,* y la observación final de este parágrafo: «hemos determinado la extensión en la medida en que era posible [en este punto de la exposición].» Véase, igualmente, el párrafo 31 y la confesión del apéndice: «no tenemos otra solución que la de ver en las extensiones de conceptos o clases, objetos en el sentido propio y pleno de la palabra, aun concediendo que el modo como interpretamos la expresión "extensión de un concepto" debería ser justificada.» *Grundgesetze,* II, p. 256. Pero la ambigüedad mencionada tiene un papel determinante en la paradoja de Russell.

Capítulo décimo

# Abstracción y construcción lógica

A lo largo de toda la Parte III de los *Fundamentos,* Frege se burla de los inhábiles esfuerzos de los que intentaban obtener el número y la unidad por abstracción a partir de los uno, por lo menos, de los usos de esta palabra. Abstraer, se la construcción de una clase de equivalencia, da un contenido preciso a lo que se llama comúnmente una abstracción —para uno, por lo menos, de los usos de esta palabra. Abstraer, se dice, es negligir. Esta gastada descripción encubre bajo la unidad de un acto psicológico, que se supone experimentado por todos, dos construcciones lógicas muy diferentes, la de los conceptos y la de los objetos. Por otra parte, una tal abstracción por «negligencia» obtiene su legitimidad de los objetos sensibles de la que proviene y a los cuales uno debe poder referirla siempre. Este criterio parece sin excepción, a menos que se haya podido modificar la doctrina empirista a la que está ligado.

Frege sustituye la relación de lo abstracto a lo concreto por la relación de un lenguaje a su referencia, anticipando la idea, hoy día corriente, de que los elementos de un lenguaje reciben su referencia por medio de la asignación dentro de un modelo.[147] En consecuencia, la construcción de los conceptos y de los nombres de objeto en el lenguaje se rige por el principio general de que debe podérseles asegurar una referencia dentro del modelo. La sutileza de la construcción de los *Fundamentos* proviene de que procede directamente, en la construcción de los enunciados y la construcción del modelo, de estos enunciados. Por esto es preciso caracterizar el procedimiento antes de mostrar su aplicación a la construcción de los números.

Todo enunciado con una variable libre se denomina «contenido de juicio» o «contenido conceptual». Determina un con-

[147] Para una definición de modelo, véase G. KREISEL y J. L. KRIVINE: *Éléments de logique mathématique. Théorie des modèles,* p. 6 y 14. Igualmente, R. MARTIN: *Logique contemporaine et formalisation,* p. 85.

cepto en el sentido general, y en adelante clásico, de predicado analizable en un haz de *características (Merkmale)* que describen las propiedades de los objetos que este concepto subsume. Esta relación de descripción es, por su naturaleza misma, una relación de *varios* a *uno* (el valor veritativo *verdadero* que adquiere la proposición obtenida asociando al concepto el nombre de un objeto que cae bajo este concepto): es ciertamente una relación funcional que aplica el conjunto de individuos distinguidos por una propiedad sobre lo *verdadero.* Lo esencial aquí es ver que la relación de un concepto a su dominio no es la de un nombre común a los objetos nombrados.[148] Esta última relación es arbitraria, y no es funcional. En cambio, un concepto está enteramente determinado por el dominio de la aplicación, siendo su imagen siempre, por definición, lo *verdadero.*

El procedimiento aplicado a la definición del número permite, en general, construir un nuevo objeto a partir de un concepto cuya extensión no es vacía, desde el momento en que se puede definir, sobre esta extensión, una relación de equivalencia. Si se repite el ejemplo geométrico en términos modernos: sobre el conjunto *dado* de las rectas del plano, se define, por medio de una relación de equivalencia, una clase de conjuntos disjuntos y, por construcción del conjunto cociente, estos nuevos objetos que son las direcciones de recta. Esta construcción va rigurosamente de la mano con la construcción, en el lenguaje de la ideografía, de nombres propios para estos objetos. De esta manera, nuevos objetos se añaden al dominio inicial y nuevos nombres enriquecen el lenguaje. Estos objetos procuran un contenido a los nuevos enunciados, y el lenguaje se enriquece con nuevos conceptos.[149] Éstos, asociados a los nombres propios del lenguaje, constituyen de manera efectiva los nuevos enunciados, para los que hay que asignar los dominios de individuos y el valor dentro del modelo inicial o dentro de su prolongación.

Hasta este punto, la construcción es viable bajo la hipótesis de que se disponga de un concepto cuya extensión no sea vacía. Ahora bien, este punto de partida, si fuera obligado, se saldría totalmente de la lógica. En efecto, habría que

[148] Sobre la confusión entre nombre común y término conceptual, véase *Fundamentos*, 51, p. 63 [p. 76 de la trad. cast.], y *Examen crítico de algunos puntos de las conferencias sobre la lógica de E. Schröder, K.S.*, p. 209.

[149] Obtenidos todos a partir de la negación, de las constantes de orden superior y de la identidad.



aceptar dentro del modelo una colección de objetos empíricos, y en el lenguaje un concepto cuyos caracteres serían la descripción de estos objetos. Frege remedió esta situación tomando como único predicado inicial la relación de identidad, que concibe como una constante lógica. Si se asocia a este predicado el functor proposicional de negación, se construye el contenido conceptual «$x$ no es idéntico a $x$». Hay en él una variable libre, y su extensión es el conjunto vacío. Al modelo inicial, que no incluía sino los dos valores veritativos,[150] Frege añade el conjunto vacío —que él llama 0. Se comprobará que la construcción de los números y la demostración de algunas propiedades elementales de la serie de los números naturales equivalen a definir los conceptos y los objetos de la aritmética por un paso repetido del lenguaje al modelo, al que se asignan los nombres del lenguaje. En el modelo, cada concepto corresponde a una aplicación, y cada objeto es, o bien el dominio, o bien la imagen, o bien el grafo de una aplicación.

La definición propuesta en el párrafo 68:

> El número del concepto $F$ es la extensión del concepto «equinumérico al concepto $F$»,

lo fue por analogía con el ejemplo geométrico, y abre un doble proceso de justificación. En primer lugar, una definición debe ser confirmada por su fecundidad: para llegar a este veredicto, se aplican los apartados 74 a 80 de la parte IV. Pero antes hay que mostrar que el ejemplo geométrico puede ser reconducido por otra dirección y que una tal definición del número es posible por un camino puramente lógico.

«La posibilidad de poner en correspondencia biunívoca a los objetos que caen bajo un concepto con los que caen bajo otro concepto», postulada en el apartado 68, viene apoyada por la tradición, tanto la de los filósofos como la de los matemáticos. El criterio propuesto de la igualdad de dos cantidades es ciertamente, si se examina bien, una aplicación biyectiva, pero siempre fue descrito bajo la especie sensible de un gesto con el que se pondrían uno al lado del otro, o frente a frente, los objetos pertenecientes a dos colecciones distin-

[150] *Grundgesetze*, I, 31: «... Hay que reemplazar $x$ por el nombre de un valor veritativo, *pues todavía no hemos admitido otros objetos.*» El subrayado es nuestro. Frege admite sucesivamente, en el modelo de su *lenguaje de la razón pura*, los valores veritativos, las extensiones de concepto y los números como individuos a los cuales se refieren las proposiciones aritméticas.

tas. Y el procedimiento tiene como finalidad numerar una colección cuyo número es desconocido por medio de otra cuyo número es conocido. En fin, el texto de Hume citado por Frege relaciona las unidades de dos números, no las de dos conceptos: el número se supone conocido, y la biunivocidad viene dada como una definición de la igualdad numérica. Respecto a todos estos puntos, Frege invierte la tradición. Al ser su objetivo emplear la equinumericidad para la definición del número, el orden de las nociones debe ser invertido, tal como se indicó con ocasión de las rectas paralelas. Si lo que hay que definir es pues la equinumericidad, el análisis se lleva a cabo en tres etapas: en primer lugar, se expone la noción general de relación (apartado 70); posteriormente, se definen la noción general de aplicación, la de aplicación epiyectiva y la de aplicación biyectiva (apartados 71 y 72); se demuestra finalmente que la aplicación biyectiva de los conceptos es una relación de equivalencia entre conceptos (apartado 73). Examinemos detalladamente los apartados 70 a 74, que describen algunos procedimientos reiterados en el curso de esta parte IV.

Pongamos el caso de un *maître* de hotel que comprueba si la mesa está bien dispuesta. Sin haber contado los platos ni los cuchillos, puede cerciorarse, de una sola ojeada, que hay tantos de los primeros como de los segundos, si cada plato tiene a su derecha un cuchillo. Veamos ahora el enunciado:

*a* se halla a la derecha de *A*.

Se trata de una relación; se verifica en el ejemplo de la mesa bien dispuesta si se asigna como valor a cada *a* un cuchillo y a cada *A* un plato. Siguiendo este ejemplo, Frege muestra que todo enunciado con dos variables libres es una relación cuyo dominio [151] es un conjunto de pares ordenados.[152] Prescindiendo de este último carácter, la relación posee la misma naturaleza que un concepto y está regida por las mismas leyes lógicas. En particular, está sometida a la regla de la estricta definición extensional y, lo mismo que un concepto de primer orden, puede ser argumento de una función de segundo orden, ya sea la función que hemos llamado cuantificación, ya sea el operador de extensión.

[151] Imbert se refiere aquí, no al *dominio* propiamente dicho de una relación, sino al *campo de definición* de una relación. El término «dominio» se suele reservar para el conjunto de los primeros elementos de cada par que define la relación. *(N. del T.)*

[152] Véase el final del párrafo 70 y la nota de la página 94.



Si no fuese por esta analogía sintáctica entre el concepto y la relación, podría ponerse en duda que la correspondencia biunívoca entre las unidades de dos conceptos pueda definirse lógicamente. Pues si los pares que satisfacen esta relación se constituyeran, como en el ejemplo de los cubiertos, a partir de objetos materiales subsumidos por los conceptos, por lo menos sería preciso que estos objetos viniesen dados y, con ellos, los caracteres empíricos del concepto que los subsume. La objeción queda refutada si se admite la sintaxis de Frege, para la cual, la función de cuantificación hace pasar de un concepto a sus casos de verdad.[153] De este modo, la relación de biunivocidad tiene como dominio pares ordenados, definidos sobre los conjuntos de casos de verdad de los conceptos y no sobre los objetos que caen bajo estos conceptos, siendo definidos estos últimos mediante constantes lógicas. De ello resulta que la relación tiene siempre un valor definido, incluso en el caso en que uno de los dos conceptos tenga una extensión vacía.[154]

Según esta definición, una relación tiene como dominio un subconjunto del conjunto de los pares formados sobre dos extensiones de concepto, es decir, del producto cartesiano (apartado 71). El apartado 72 precisa las condiciones en virtud de las cuales una relación y su inversa son funcionales.[155] Tomadas conjuntamente, definen una aplicación biyectiva.

Falta establecer que la biunivocidad de los conceptos es un criterio de identidad de los números (apartado 73). En este caso, hay que verificar que si dos conceptos son equinuméricos a un tercero, son equinuméricos entre sí. El apartado 73 da, esquemáticamente, la demostración de que el compuesto de dos biyecciones sigue siendo una biyección. Esta última se define por medio de un enunciado con dos variables libres.[156] Es fácil comprobar entonces que la equinumericidad es una relación de equivalencia entre conceptos: la reflexividad y la simetría son consecuencias inmediatas de la definición de la equinumericidad, y la transitividad ha sido establecida en el apartado 73. Determina, pues, una división de

[153] Véase apéndice 2 sobre la lógica de Frege.

[154] *Fundamentos*, 71.

[155] Una relación es funcional si, a todo elemento del dominio de definición le corresponde una imagen y sólo una. En los *Fundamentos*, Frege designa con la misma letra una relación y su inversa. Esta laxitud no tiene consecuencias, pues Frege no considera sino aplicaciones biyectivas.

[156] *Fundamentos*, 73, p. 86 [p. 87 de la trad. cast.].

los conceptos en clases de equivalencia y, con reserva de la ambigüedad señalada anteriormente, es legítimo concluir: el número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*».

Se ve que el paso de un concepto al número que le corresponde incluye poner de manifiesto una relación de equivalencia; ésta se halla encubierta en el enunciado de la definición del número, pero, con todo, es fácilmente identificable. El concepto «equinumérico al concepto *F*», cuya extensión es un número, está formado por la relación «... equinumérico a ...», saturada parcialmente por el parámetro, en este caso el concepto *F*.[157]

[157] El simbolismo ideográfico de esta definición pone de manifiesto la relación de equivalencia, compuesta de una relación funcional y su inversa. Véase *Grundgesetze*, I, 40 y 41, donde Frege cita los *Fundamentos*.

Capítulo once

# Definición de los cardinales finitos

Un número queda determinado a partir del momento en que se le asigna el parámetro de la definición general, es decir, el concepto al cual este número corresponde. Construir un número equivale a definir un concepto —un enunciado con una variable libre—, utilizando la igualdad como única constante lógica, la aplicación biyectiva antes definida, los functores proposicionales de la negación y de la conjunción, y, finalmente, las funciones de segundo orden: cuantificación y extensión. Los últimos parágrafos del capítulo IV definen, siguiendo este principio general, los números 0 y 1 y el predecesor inmediato de un número dado.

0 es la extensión del concepto: equinumérico al concepto «no idéntico a sí mismo». Esta definición se basa en una biyección entre el concepto «no idéntico a sí mismo» y cualquier otro concepto bajo el cual no caiga nada (apartado 75). En cuanto al predecesor de un número, se define por medio de una biyección restringida entre conceptos. Un número *n* correspondiente a un concepto *F* es sucesor de un número *m* correspondiente a un concepto *F'* si existe una biyección entre *F* y *F'*, restringida en *F* por la exclusión de uno de sus elementos. Una aplicación tal existe entre el concepto «idéntico a 0» [158] y el concepto «idéntico a 0, pero no idéntico a 0». 0 es el número que corresponde a este último concepto. Es, por definición, el predecesor inmediato de 1, con la condición de que se haya mostrado la unicidad (apartado 76 a 78).

Para completar la exposición de las proposiciones elementales de la aritmética,[159] falta todavía por demostrar que todo número tiene un sucesor. En primer lugar, Frege define la no-

[158] El número que corresponde a este concepto es la extensión del concepto «... equinumérico al concepto "... idéntico a 0"»; es el número cardinal de un concepto cuando sólo existe un caso de verdad.

[159] Es decir, las equivalentes a los cinco axiomas de Peano. Véase apéndice 1.

ción de «suceder en una serie-*f*». Si se toma por *f* la relación biunívoca antes definida, que vincula un número con su predecesor, se obtendrá la *sucesión inmediata en la serie de los números naturales*. La definición de la serie-*f* se saca de la tercera sección de la *Begriffschrift*. En ella se basa la inducción de Bernoulli, es decir, el paso de $n$ a $(n+1)$; los cardinales se definen por recursión.[160] Las *Leyes fundamentales* ofrecen en la ideografía la enumeración explícita [161] de esta serie de los números naturales. Se reconoce en ella la extensión de la relación «predecesor inmediato». La larga simbolización equivale a describir la aplicación que, a todo número ya definido, le asocia su sucesor, el cual se puede construir según las reglas dadas precedentemente. Dedekind vio en ello el equivalente a su propia definición de la *cadena*.[162]

Mediante una primera forma de utilización de esta definición, Frege establece que el número correspondiente a un segmento limitado inicial de la serie de números sigue inmediatamente al último número del segmento (apartados 82-83). Otro uso de la definición de la *serie* muestra que la propiedad anterior se transmite en la serie de los números naturales. De ello resulta que todo número tiene un sucesor; o también, tomando esta propiedad como característica del número finito,[163] que ningún número finito se sucede a sí mismo.

[160] Véase HALMOS: *Introduction à la théorie des ensembles*, pp. 60-61.
[161] *Grundgesetze*, I, 45; Frege da aquí la traducción a la ideografía del párrafo 79 de los *Fundamentos*, citado textualmente.
[162] A pesar de que el método de Frege le era totalmente extraño. Citamos los textos más abajo. Esta definición comporta una función de tercer orden (en el sentido de Frege), puesto que una letra de predicado figura en el lugar de la variable de cuantificación. Esta particularidad corresponde, en la definición de Dedekind, al hecho de que la serie de los números naturales se define como la intersección de todas las cadenas a las cuales pertenece el primer elemento de esta serie (párrafos 44 y 73 en *Was sind un was sollen die Zahlen*). Véase apéndice 2.
[163] *Fundamentos*, 83, p. 96 [p. 106 de la trad. cast.].

Capítulo doce

# Los cardinales infinitos

La última sección del capítulo IV trata brevemente de los números infinitos. En verdad, Frege define aquí solamente el primer cardinal infinito. Pero emplea repetidas veces el plural (números [cardinales] infinitos) y su total acuerdo con Cantor en lo fundamental hace suponer que no excluyó una aritmética de los infinitos.

Puede parecer sorprendente hallar en este punto de la construcción una sección dedicada a los números infinitos, cuando la aritmética de los números finitos apenas ha sido esbozada, y los demás números finitos, racionales, reales y complejos, se examinan más adelante. Frege lo explicó:[164] «Se pensará quizá que se podían haber omitido las proposiciones concernientes al número infinito (el número de un conjunto infinito numerable). Ciertamente, no son necesarias si se quiere fundamentar la aritmética en su extensión tradicional, pero su deducción es mucho más simple [165] que la de las proposiciones correspondientes de la aritmética finita y son una buena preparación para estas últimas.» La razón más fundamental es que la definición de los números racionales, irracionales e imaginarios nos obliga a salir del dominio de los cardinales. Esa definición se basa en una teoría general de las magnitudes. El instrumento esencial ya no es la biyección, sino las nociones de proporción y límite, definidas sobre pares o conjuntos de cardinales.[166]

El número infinito se obtiene (apartado 84) como antes, especificando la definición general del número, es decir, enun-

[164] *Grundgesetze*, I. p. V, prólogo.
[165] En efecto, es más fácil definir la numeración de un concepto (conjunto) infinito por medio de la serie de los números naturales empezando por 0 (*Grundgesetze*, I, 128), que definir la numeración de un concepto finito por medio de un segmento limitado de la serie de los números naturales empezando por 0 (apartado 158).
[166] Véase más abajo.

ciando un concepto al que este número infinito corresponda:

El número cardinal $\infty_1$ es el número que corresponde al concepto «número cardinal finito».

O también:

El número cardinal $\infty_1$ es la extensión del concepto «...equinumérico al concepto "número cardinal finito"».

Se ve cómo el enunciado de una relación de equivalencia: «... equinumérico al concepto...» se ha transformado en un predicado con una variable libre, mediante la asignación de un parámetro, en este caso: número cardinal finito. El cardinal infinito es el cardinal de la serie natural de los cardinales finitos; tiene como propiedad la de sucederse a sí mismo. En efecto, el cardinal $\infty_1$ corresponde a un concepto *F*, si existe una biyección entre los objetos que caen bajo este concepto y la serie natural de los números finitos. Ahora bien, sigue habiendo la misma biyección, si se aplica la serie de los cardinales finitos sobre la *unión* del concepto *F* y de otro concepto cualquiera al que corresponda un cardinal finito. La demostración, anunciada en los *Fundamentos* y dada en las *Leyes fundamentales,*[167] consiste en mostrar que, a partir de una aplicación biyectiva de un concepto *F* infinito sobre el conjunto de los cardinales «naturales», no se puede definir ni una extensión ni una restricción de esta biyección. De ello resulta inmediatamente que un conjunto infinito es equinumérico a uno de sus subconjuntos propios.

Esta demostración y su lugar en la exposición ponen de relieve, con extremo detalle, el constructivismo de Frege. Él mismo lo subrayó en la reseña de la obra de Cantor, *Zur Lehre vom Transfiniten.*[168] Al comparar las definiciones del número infinito propuestas por R. Dedekind, G. Cantor y él mismo, Frege observa que el primero define ante todo la cadena y los sistemas infinitos (véase apartado 64 de su ensayo), «y da como característica del infinito la de ser semejante [169] a una parte propia de sí mismo, de donde se sigue que lo finito se define como no infinito. Inversamente, Cantor trata de definir lo finito en primer lugar, tal como yo mismo he hecho. Los dos métodos son posibles y se puede demostrar que los sistemas infinitos de Dedekind son no finitos en el sentido en

[167] *Fundamentos,* 84, p. 96 [p. 107 de la trad. cast].

[168] *K.S.,* p. 165. Esta reseña es del año 1892.

[169] Un sistema (conjunto) se dice que es semejante *(ähnlich)* a otro sistema, si existe una aplicación biyectiva entre los dos sistemas. *Was sind und was sollen die Zahlen,* 26.



que yo lo entiendo.[170] La proposición recíproca es igualmente cierta, pero la prueba de ello es bastante difícil, y en la obra de Dedekind no viene dada con la solidez que sería de desear».

La elección de Frege no está motivada por la sensación de que es más *natural* definir el número infinito *después* de los números finitos, como si se sucedieran, como si el número infinito fuese el primero *después* de los números finitos —la construcción de Frege no apela jamás a la serie ordinal. Más bien, al definir primeramente los cardinales finitos a partir del conjunto vacío, Frege *construye* [171] un conjunto infinito, y no necesita axioma alguno o demostración suplementaria para asegurar la existencia del número infinito. Por el contrario, Dedekind no puede evitar una tal demostración; apela al universo de nuestros pensamientos, en el cual se puede definir una biyección que asocia este conjunto a una de sus partes propias.[172] Es sabido que el argumento fue atacado por Hilbert y que fue reemplazado por el axioma del infinito en los tratados conjuntistas posteriores.

Si se tiene en cuenta el orden temático, Frege, en esta reseña de 1892, parece preferir el tratamiento cantoriano. Pero si bien jamás pone objeciones a los resultados de Cantor —en lo cual fue una excepción entre sus contemporáneos—, criticó con impaciencia [173] sus métodos y definiciones. El apartado 85 de los *Fundamentos,* que modera el elogio con algunas objeciones, fue el origen de un malentendido duradero. Frege se había esforzado allí por establecer un paralelo entre sus propias definiciones y las de Cantor; éste se defendió de las obje-

[170] Esta prueba es la del apartado 126 de las *Grundgesetze,* citada más arriba, En cuanto a la equivalencia entre las definiciones de Dedekind y de Frege, viene dada en los apartados 128 a 148. Frege demuestra allí que todo concepto (conjunto) cardinal $\infty_1$ puede ser puesto en correspondencia biunívoca con la serie de los números finitos, y que todo concepto con esta propiedad es infinito. Si se hace el razonamiento dentro de la teoría de Zermelo, esta prueba requiere el axioma de elección (véase SUPPES, *Axiomatic Set Theory,* pp. 141-142). Lo cual confirma la crítica de Frege, según la cual la demostración de Dedekind tiene huecos, si se admite, con un margen de aproximación, que Zermelo axiomatiza la teoría de *sistemas* de Dedekind.

[171] Bajo la condición, naturalmente, de que se conceda a Frege todos los recursos de la ideografía.

[172] *Was sind und was sollen die Zahlen,* 66.

[173] En los *Fundamentos,* Frege cita las *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* que reúnen cinco memorias aparecidas entre 1880 y 1883; constituyen lo que J. Cavaillès denomina la primera creación cantoriana. Véase, igualmente, *Grundgesetze,* II, apartados 68 a 85.

ciones con acritud y criticó a su vez, sin comprenderla realmente, la definición lógica del número por medio de una extensión de concepto.[174]

A pesar de ello, la identificación que hizo Frege de la potencia cantoriana y del número cardinal es legítima, y parece que Cantor la admitió tácitamente en sus últimos escritos, en la última elaboración de la aritmética transfinita.[175] En 1884, esta aritmética le pareció inaceptable. Además de las objeciones propiamente lógicas, concernientes a la extensión de concepto que examinaremos más abajo, Cantor le reprocha a Frege el ignorar la labor propiamente matemática que da acceso a los números infinitos. Frege define de golpe los cardinales infinitos. Cantor, en cambio, aun admitiendo un parentesco profundo de los ordinales y los cardinales para los números finitos, cree necesario distinguirlos cuando se aborda el infinito, y propone tratar a los primeros antes que a los segundos.[176] La *potencia* infinita es derivada respecto al *número ordinal* infinito, puesto que resulta de la equipotencia de conjuntos ordinalmente infinitos. Al identificar número cardinal y número ordinal finitos, Cantor quiere decir que el modo de generación de los números, por adición de 1, es el mismo en ambos casos. Pero al pasar de lo finito a lo infinito, Cantor introduce un segundo modo de formación que consiste, «cuando nos hallamos en presencia de una sucesión determinada cualquiera de números reales definidos, de los cuales ninguno es el mayor, en crear un nuevo número que será considerado como el límite de estos números, es decir, como el número inmediatamente más grande que todos

[174] Reseña de los *Fundamentos*, en el «Deutsche Literatur Zeitung», 1885, reproducida en *Gesammelte Abhandlungen*. El mismo compilador de Cantor, Zermelo, señala la injusticia y la incomprensión de las críticas de Cantor.

[175] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895), I, párrafo *a*: «Todo agregado M tiene una *potencia* definida que se denominará también su número cardinal.»

[176] «La concepción del número que, en el orden finito, descansa en el fundamento único de la disposición ordinal, se ramifica, por así decir, cuando nos elevamos al infinito, en dos concepciones: la de potencia... independiente del orden impuesto al conjunto y la de número ordinal *(Anzahl)* que necesariamente va ligada al orden impuesto al conjunto por una regla mediante la cual el conjunto es bien ordenado... Si desciendo de lo infinito a lo finito, veo con la misma claridad y la misma belleza cómo estas dos concepciones se unen de nuevo y se funden en la de número entero finito.» G. CANTOR, *Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre*, pp. 181-182, citado en parte por J. CAVAILLÈS, *Philosophie mathématique*, p. 86.



ellos».[177] Este segundo modo es, según Cantor, indispensable para la construcción del número infinito, y Frege ignora la dependencia de éste respecto del orden.

La historia de la creación cantoriana ha mostrado que la teoría abstracta de conjuntos se apartó lentamente de la teoría de conjuntos de puntos y de las concepciones del análisis;[178] de ahí el papel capital del orden y del límite en la definición de los números infinitos, en el sentido cantoriano de ordinal. Y es justo decir que Cantor no podía abandonar sus intuiciones «analíticas» antes de tener una definición abstracta de conjunto, que era precisamente lo que Frege intentaba ya desde 1884.[179] Por otra parte, ninguna de las consideraciones filosóficas y epistemológicas de Cantor podía satisfacer a Frege. Dejando de lado las justificaciones teológicas que Frege ignoró voluntariamente,[180] Cantor tomó sucesivamente primero una posición formalista y luego psicologista,[181] que Frege atacó constante y reiteradamente.

[177] G. CANTOR: *Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre*, citado por J. CAVAILLÈS: *Théorie abstraite des ensembles, en Philosophie mathématique*, p. 87.

[178] Véase J. CAVAILLÈS: *op. cit.*, p. 79 y Philip E. B. JOURDAIN: Introducción a la traducción inglesa de *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.*

[179] Zermelo, en el comentario que acompaña la reseña que Cantor hizo de los *Fundamentos*, identifica explícitamente extensión de concepto y clase lógica en el sentido de conjunto.

[180] Véase la reseña de la obra de Cantor, ya citada, *K.S.*, p. 163: «Las consideraciones del señor Cantor provienen unas veces de la teología y de la filosofía de la religión, otras de la lógica y de las matemáticas. Permítaseme que limite mi examen a estas últimas...»

[181] Véase JOURDAIN: *op. cit.*, p. 70 y el recurso a la *intuición interior* que Frege no dejó de señalar en los *Fundamentos*, 86.

Capítulo trece

# Los Fundamentos ante la crítica contemporánea. Extensión de concepto, clase, conjunto

Es sabido que los *Fundamentos fueron poco leídos*,[182] incluso ignorados por parte de los matemáticos ortodoxos, cuyo centro de intereses radicaba entonces en el análisis y la teoría de las funciones definidas sobre el campo de los números reales. De ahí que la reseña que hizo Cantor, por injusta que fuese, en cierto sentido fue un homenaje, dado que reconocía una convergencia en los temas de investigación. Hasta se podría explicar el arranque de mal humor de Cantor por la crisis intelectual de que fue víctima en 1884.[183] Cuando sus descubrimientos eran ignorados por los matemáticos académicos, puede comprenderse que le fuese particularmente amargo constatar que la distinción entre número cardinal y ordinal, y que el descubrimiento de los diferentes principios de formación de los números, de lo que estaba algo orgulloso,[184] eran despreciados incluso por uno que admiraba su obra y aceptaba el infinito actual. Pero la razón del desacuerdo proviene de la lógica de Frege, ininteligible para sus contemporáneos. El propio Dedekind tropezó con este obstáculo. Cuando en 1890, en una carta a Keferstein, compara las definiciones de Frege con las suyas propias, le otorga una identidad de puntos de vista a pesar de la diferencia de las formulacio-

[182] Frege se lamentó de que los *Fundamentos* no hubiesen sido ni siquiera citados en las publicaciones especializadas, tales como el «Jahrbuch über die Fortschritte der Math». (*Grundgesetze*, I, p. XI). Es de notar el hecho de que Cantor, también mal acogido por los matemáticos académicos, publicase la reseña de la obra de Frege en el «Literaturzeitung». Sobre el despotismo poco ilustrado de Kronecker, en aquel entonces omnipotente en Berlín, véase J. CAVAILLÈS: *Introduction à la correspondance Cantor-Dedekind*, *op. cit.*, p. 180.

[183] Véase los textos citados en la obra de J. Cavaillès, pp. 182-183, y la biografía de Cantor por Fraenkel, publicada en G. CANTOR: *Gesammelte Abhandlungen*.

[184] Véase los textos citados en la obra de JOURDAIN, p. 52 y de J. CAVAILLÈS, pp. 86-87.

nes y de la incomodidad de la simbolización.[185] Esta crítica cortés, que corresponde exactamente a la de Frege al comparar la terminología cantoriana con la suya, vela un desacuerdo sobre el método, es decir, sobre esta «lógica de conceptos», con la que Frege se adelanta a sus contemporáneos. Y fue sobre este punto preciso que Frege creyó necesario justificarse.[186]

Cantor había escrito: «El autor llega a la idea infeliz... de tomar por fundamento del concepto de número lo que se llama extensión de un concepto; al hacer esto olvida que la extensión de un concepto es, en general, enteramente indeterminada con respecto a la cantidad.» A lo cual Frege respondió diciendo que la crítica sería pertinente si hubiese definido el número de los satélites de Júpiter como la extensión del concepto «...satélite de Júpiter». Pero la crítica no atañe a la definición realmente propuesta, que identifica el número de satélites de Júpiter con la extensión del concepto «equinumérico al concepto "satélite de Júpiter"»; y, añade Frege, no se trata en absoluto de una determinación cuantitativa [187] de esta extensión de concepto. Cantor no había tenido en cuenta el *orden* o *nivel* de los conceptos ni el modo de poner en evidencia el número por medio de un criterio de igualdad puramente lógico, es decir, de una relación de equivalencia; éste es el sentido de la aclaración de Frege.[188] ¿Cómo fue posible ese malentendido? La confusión cantoriana encubre otra confusión, entre la extensión de un concepto y el conjunto material de los objetos que se dice que «cae bajo el concepto». En este caso, ninguna extensión de concepto, aunque fuese de segundo orden, podría ser un número. O, como dice Cantor,

[185] «He observado con placer que el modo como él (Frege) define la sucesión no inmediata de un elemento a otro en una serie es esencialmente la misma que mi noción de cadena, pero no hay que dejarse desconcertar por su terminología algo incómoda.» (Carta a Keferstein, *A Source Book*, p. 101.)

[186] «Deutsche Literaturzeitung», 1885, reproducido en *K.S.*, p. 112.

[187] Esta importante distinción se hace ya en el breve parágrafo 69 de los *Fundamentos*, dedicado a las extensiones de concepto. La tricotomía cuantitativa no se aplica a las extensiones de conceptos, sino únicamente a los números. Las extensiones tienen entre sí una relación de igualdad y de desigualdad, según que se pueda o no definir una biyección que asocia sus elementos respectivos. Frege quiere decir que la equinumericidad se establece antes de la determinación de un número particular. Véase más arriba, p. 179 de este estudio y la nota 18.

[188] «Sospecho que hay un malentendido y espero haberle puesto fin (por medio de la explicación precedente).» *K.S.*, p. 112.



habría que saber de algún modo lo que es un número, si se quiere atribuir un número a una extensión de concepto. Por lo que hace al número en sí mismo, se obtiene, según Cantor, por medio de una doble abstracción: «Por conjunto *(Menge)* entendemos toda colección, en un todo M de objetos *m*, definidos y separados, de la intuición o del pensamiento. Estos objetos se llaman *elementos* de M... Se designará por el término de *potencia* o *número cardinal* el concepto general que se obtiene utilizando la facultad activa de pensar, a partir del conjunto M, si se hace abstracción de la naturaleza de sus diversos elementos *m* y del orden en el cual estos elementos vienen dados.» [189]

Cantor da una definición extensional de conjunto, pero no corre el riesgo de confundir el conjunto con el grupo material de sus elementos.[190] Esta confusión la comete, sin lugar a dudas Schröder, y el propio Dedekind no logra escapar a ella.[191] Frege le reprocha, con toda razón, no haber distinguido la pertenencia de un elemento a un conjunto y la inclusión de un conjunto dentro de otro conjunto. De ahí la serie de dificultades lógicas que obstaculizaron el desarrollo de la teoría. Si se entiende por «conjunto» una clase en el sentido material de objetos cualesquiera, es imposible distinguir entre el conjunto que no tiene más que un elemento y este elemento mismo. Tampoco se sabría cómo dar una definición del conjunto vacío, conforme a la noción de clase material. En efecto, ¿qué sería una clase —en el sentido material— que fuese vacía? Es necesario, entonces, o bien renunciar a considerar el conjunto vacío, y ésta es la decisión tomada por Dedekind en *Was sind und was sollen die Zahlen* (apartado 2), o bien añadir, por convención explícita, que se llamará conjunto vacío aquel que no contiene ningún elemento. Por la misma convención arbitraria se dirá que el conjunto vacío siempre forma parte de los subconjuntos de un conjunto dado. De ahí la advertencia de Frege: las clases dan lugar a una teo-

[189] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, I. (1895, párrafo 1.

[190] Si no fuese por la precisión: «toda colección *en un todo.*» Es sabido que esta expresión fue largamente sopesada por Cantor, y le dio la oportunidad de distinguir entre las multiplicidades consistentes e inconsistentes. Véase J. Cavaillès: *op cit.*, p. 117. Pero sigue siendo cierto que su definición de conjunto apela explícitamente a dos actos de abstracción. Ahora bien, «el término *abstraer* pertenece a la psicología y debe ser excluido de las matemáticas». *K.S.*, p. 165.

[191] *Grundgesetze*, I, pp. 1-2, 0.

ría de la relación todo-partes, en el sentido de Schröder, que debe ser rigurosamente distinguida de la lógica.[192]

Para escapar a las incomodidades de la *clase*, en el sentido tradicional, Frege define todo conjunto o subconjunto por medio de las características constitutivas de un concepto *(objektives Merkmal)*, es decir, por una función característica. Dada la definición de Dedekind,[193] impugnada por Frege:

«Un sistema A se dice que es parte de un sistema S si todo elemento de A también es un elemento de S.»

Tal definición, según la lógica de los *Fundamentos*, caracterizaría mejor la especie aristotélica que no el conjunto o el subconjunto en el sentido lógico. Frege, por su parte, define todo subconjunto, y el conjunto vacío, por medio de un concepto del que es la extensión, procedimiento ejemplificado en el parágrafo 76 de los *Fundamentos*. Un concepto tal es un enunciado cuyo sentido consiste en excluir de un conjunto dado tal elemento, o todos los elementos de su extensión. En esto se reconoce fácilmente una aplicación del *axioma de separación*.

Si bien la teoría de Frege es extensional, no lo es en el sentido en que se entiende usualmente: la extensión de un concepto no es la colección de los objetos que «pertenecen» al grupo que constituyen; es el conjunto de los casos veritativos de este concepto, o mejor, el conjunto de los casos en que un argumento satura efectivamente el lugar vacío del concepto. Lo mismo que el concepto y la no saturación del concepto, la extensión es, como se ha visto, una realidad puramente lógica. En términos modernos, se diría que es el dominio de definición en que el argumento toma sus argumentos. De ello resulta que la ley V de las *Grundgesetze* es una ley cuya función es semántica, que tiende a completar la teoría de la cuantificación de la primera *Begriffschrift* con la introducción de los dominios correspondientes a los conceptos.[194]

[192] *K.S.*, p. 210: reseña de la obra de SCHRÖDER: *Vorlesungen ilber die Algebra der Logik.*
[193] DEDEKIND: *op. cit.*, 3.
[194] Esta ley podría enunciarse así: si, para todo argumento *x*, el valor veritativo de la función *F(x)* es idéntico al valor veritativo de la función *G(x)*, entonces existe una biyección entre los dos conceptos (o funciones) *F* y *G*, es decir, entre sus dominios. Obsérvese que esta ley es metalógica y se refiere a la semántica de la ideografía. Más exactamente, define, en el modelo, una biyección entre las extensiones que satisfacen las condiciones del antecedente y, con la ambigüedad ya notada, enuncia una identidad sobre el conjunto cociente, de acuerdo con el módulo de esta biyección.



En los *Fundamentos*, y después en las *Leyes fundamentales*, Frege afirma, en diversas ocasiones, que la extensión de concepto es la misma que utilizaron la lógica de Leibniz y la de Boole.[195] Pero esta asimilación se propone, aunque con reservas, y Frege previó que se le pudieran hacer objeciones: «... la controversia puede surgir, por lo que veo, únicamente respecto al caso de la ley fundamental, que se refiere a las extensiones de concepto (V), que los lógicos todavía no han enunciado con exactitud; y, no obstante, esto es en lo que piensan cuando hablan de extensiones de concepto».[196]

Según una tradición que tuvo su origen en la *Logique* de Port-Royal,[197] la *extensión* de un concepto va ligada a su comprensión por la ley de su variación inversa.[198] Esta ley no se enuncia en la *Logique* de Port-Royal, pero es sugerida por el modo en que Arnauld y Nicole asignan la relación que liga una idea a su *extensión.* Dos procedimientos permiten restringir la extensión de una idea: añadiéndole otra idea distinta y determinada, «como cuando a la idea general del triángulo añado la de tener un ángulo recto»; o bien «añadiéndole solamente una idea indistinta e indeterminada de parte, como cuando hablo de algún triángulo». Mediante el primer procedimiento se obtiene una restricción de la extensión, tomada en el sentido de colección material, ampliando la comprensión de la idea.

Es sabido que la ley de la variación inversa de la extensión y la comprensión, interpretada stricto sensu, es falsa. Su verosimilitud proviene de la evidencia ilusoria de los círculos de Euler. La ley fue denunciada por Bolzano, y si bien es citada en los *Fundamentos*, lo es en un contexto irónico. La crítica de los diagramas eulerianos (apartado 88) elimina todo equívoco, en el supuesto de que fuera necesario eliminarlo.

En la concepción fregeana, la extensión «no está constituida por los objetos que caen bajo el concepto del modo

[195] Véase, por ejemplo, los *Fundamentos*, p. 117 [p. 124 de esta traducción], *Grundgesetze*, I, p. 14.
[196] *Grundgesetze*, I, p. VII.
[197] «Llamo *comprensión* de la idea los atributos que ésta incluye en sí misma y que no le pueden ser quitados sin destruirla... Llamo *extensión* de la idea los sujetos a los que conviene esta idea...» *La logique ou l'art de penser*, I, 6. Los autores emplean «*étendue*» en vez de «*extensión*», pues este último término designaba, en la época cartesiana, el atributo esencial de la materia.
[198] «Cuanto mayor es la extensión de un concepto, menor es su comprensión.» *(N. del T.)*

como un bosque está hecho de árboles.[199] Está ligada al concepto en tanto que es una propiedad primitiva del concepto, pero el paso del uno a la otra no es inmediato ni idéntico en todos los casos. Se ha visto que los conceptos se escinden en tres grupos, según que sus características constitutivas describan una cualidad, una propiedad individualizante o la propiedad de otro concepto, si se trata de conceptos de segundo orden. En el primer caso, no puede asignarse la relación entre un concepto y su extensión. Dado que no puede decidirse para todo objeto si cae o no bajo un concepto tal, éste no está «estrictamente delimitado», y cae fuera del campo de la lógica de Frege. A fortiori, la extensión de un concepto tal no es un objeto de la ideografía. En el segundo caso, en que el concepto es una unidad y permite distinguir unidades, su extensión es definida —es el conjunto de los casos veritativos del concepto—, pero desconocida en general. Un concepto-unidad juega, pues, el papel de un criterio de identificación para los objetos que son sus unidades. Es, por tanto, una relación de equivalencia disimulada bajo un concepto por una saturación parcial. Finalmente, en el último caso, en que el concepto es de segundo orden, puede saberse si el concepto-argumento tiene una extensión universal o limitada sin que, por ello, se tenga un conocimiento explícito de su extensión.[200] Se ve que, en ninguno de estos casos, la función que permite pasar de un concepto a su extensión no ofrece un conocimiento determinado de ésta. A lo sumo podrá decirse que dos conceptos tienen la misma extensión, si tienen los mismos casos de verdad —éste es el contenido de la ley V. Esta identidad tiene la función de una identificación en el caso muy particular en que una de las dos extensiones de concepto sea conocida: así se definieron el número 1 y el sucesor de un número, o en ese otro caso, también particular, en que la extensión es vacía: así se definió el número 0.

Semejante elaboración de la extensión de concepto está enraizada sin duda en la tradición, pero igualmente se libera de ella. En la lógica clásica, la relación que une un concepto con su extensión, colección material de objetos, es, en último análisis, el camino recorrido por la abstracción. Si un concepto se abstrae de objetos sensibles, el camino puede ciertamente ser recorrido en sentido inverso y siempre debe ser

[199] *K.S.*, p. 210.

[200] Este caso se ilustra, con las convenciones notacionales modernas, por medio de una fórmula tal como: $\bigwedge x\ P_1\ (x)$ o bien $\bigvee x\ P_2\ (x)$.



posible volver de un concepto a la extensión; la relación descrita es la de un nombre común a los denominados. Ahora bien, Frege rechaza la base epistemológica de la abstracción y ataca el «nombre común». La ideografía no contiene sino nombres propios y la relación de un concepto a los objetos que subsume no es de denominación, sino de descripción.

Prescindiendo del caso del conjunto vacío, solamente la regla V puede determinar una extensión de concepto, precisando bajo qué condiciones dos extensiones son idénticas. Aquí, Frege, apelando a la autoridad de Leibniz, todavía pone de su lado a la tradición filosófica, pero la exigencia que nos obliga a entenderla en su sentido recto es rigurosa.

«El concepto y la relación son los fundamentos sobre los cuales levanto mi construcción.» [201] Si se precisa que esta construcción sea la de extensiones de concepto y extensiones de relación, esta confesión muestra anticipadamente que Frege no podrá jamás renunciar a la ley V, a pesar de la objeción de Russell y a pesar de sus propios escrúpulos.[202] Es indudable que el modo como emprendió la tarea de librar a la ley V de la paradoja que le iba asociada, no le pareció satisfactorio; no obstante, mantuvo la convicción de que la extensión de concepto, en tanto que es el dominio de una aplicación, es tan necesaria para el fundamento lógico de las matemáticas como la noción misma de aplicación. En este sentido, y teniendo en cuenta las correcciones necesarias, los *Fundamentos de la aritmética* y su elaboración, llevada a término en las *Leyes fundamentales*, constituyen una etapa a partir de la cual Frege no podía ya volverse atrás.[203]

[201] *Grundgesetze*, I, 0, p. 3.

[202] Véase *Grundgesetze*, I, p. VII, y *Grundgesetze*, II, Apéndice: «Nunca me he ocultado su falta de evidencia, evidencia que poseen las demás leyes y que se debería exigir de una ley lógica.»

[203] «La cuestión primordial de la aritmética es saber cómo pueden concebirse objetos lógicos, en particular, los números. ¿Qué argumentación nos justifica al considerar los números como objetos? Si bien el problema no está resuelto tan completamente como yo creía en el momento de redactar este libro, no dudo, en cambio, que he encontrado el camino que permitirá llegar a su solución.» *Grundgesetze*, II Apéndice, p. 265, Y. W. V. QUINE: *On Frege's Way Out*, *Selected Logic Papers*, p. 146.

Capítulo catorce

# Del origen de los conceptos. Crítica de Kant

El capítulo 5 es una larga conclusión sobre el esbozo precedente de una construcción lógica de la aritmética. Dos filosofías parecen amenazar por igual esta tentativa: la teoría kantiana del conocimiento y el formalismo. Frege criticó vivamente los principios de este último,[204] precisamente en el aspecto en el que parecía triunfar: a propósito de la teoría formal de los números irracionales y complejos. En cambio, la filosofía kantiana es tratada con gran consideración. El homenaje que le hace es el signo de una fidelidad profunda y las correcciones propuestas por Frege dan una imagen muy segura de su propio racionalismo.

Kant creyó necesario situar las proposiciones fundamentales de la aritmética entre las proposiciones sintéticas a priori. Frege, que conserva la distinción entre analítico y sintético a priori, llegó a la conclusión de que Kant subestimó el valor de las proposiciones analíticas. Este menosprecio, en el caso de Kant, proviene de un doble error, el primero de los cuales es una mala definición de lo analítico. Esta definición fue corregida en el capítulo I de los *Fundamentos:* Frege mostró allí que una proposición debe ser calificada de analítica teniendo en cuenta sus premisas, no juzgándola solamente según su contenido. Esta determinación se obtiene a partir de la teoría de la prueba, no del análisis de la proposición en la relación del sujeto con el predicado. El otro error de Kant va ligado a este último análisis de la proposición. Si se considera toda proposición según la relación del concepto sujeto al concepto predicado, se ignora, como se ha visto, el caso de las proposiciones existenciales, en las que

[204] Se trata del formalismo contemporáneo a Frege. Hankel es su representante más frecuentemente citado; su teoría fue juzgada inconsistente por JOURDAIN: *op. cit.*, p. 70. Sobre el formalismo de Frege, véase más abajo.

en vano se buscaría un concepto sujeto. Si Kant no se dio cuenta de esto fue por fidelidad a la idea de que toda proposición científica, en oposición al juicio de percepción, consiste en la subordinación de un concepto a otro concepto, o también, como se venía diciendo desde Aristóteles, porque no hay más ciencia que la ciencia de lo general. Este análisis de la proposición científica, según la subordinación de los términos que la constituyen, es el resultado de una definición demasiado estrecha de los *conceptos* —y es aquí donde se encuentra el verdadero error o limitación de la filosofía kantiana.[205]

Kant no parece admitir más que un modo único de determinación de conceptos, y el menos fructífero: mediante la reunión de las características que han de constituir la comprensión del concepto (apartado 88). Para apoyar su crítica, Frege le opone las definiciones de concepto utilizadas por los matemáticos «en acción» y recurre a una metáfora, sacada, por lo demás, a los tratados elementales y tradicionales de la lógica.[206] Dado un diagrama en el que diferentes dominios planos representan las características de los conceptos, definir un nuevo concepto[207] es reunir de manera inédita los dominios existentes, pero sin modificar en nada su articulación primera. Esta topografía de dominios restituye, volens nolens, la metáfora platónica del corte dialéctico, y sirve solamente para la teoría del silogismo, que fue su punto terminal. Estos dominios, en que las partes recubiertas representan las características coordenadas de un concepto, son la proyección, en el plano de las célebres series o columnas, de la lógica de Aristóteles.[208] El recubrimiento de los sectores pone de manifiesto el *término medio* de un silogismo y aporta una solución intuitiva elegante al *pons asinorum* de los escolásticos.[209] ¿Pero tuvo este diagrama alguna utilidad fuera de los ejercicios escolares? A estas partes planas, Frege opone la imagen de una relación orgánica, más íntima, entre las características determinantes de un concepto; relación que sería difícil de precisar si nos ciñéramos solamente al texto del apartado 88. Frege cita dos ejemplos: la definición de la continuidad de una función, y su propia definición del número; pero no da la regla general.

[205] Si se consultan con atención los escritos de Frege, se verá que, con perfecta lucidez Frege se atribuye a sí mismo, esencialmente, la *ampliación* de la noción de *función*. Fue ésta la que permitió la construcción lógica de la aritmética; pero es también el origen único de la teoría de las funciones veritativas y de la cuantificación. El núcleo de la obra de Frege es la identificación del concepto y la función, de lo cual nace su teoría de las aplicaciones y de las extensiones de concepto.

[206] Se atribuye esta representación a Euler, en su exposición de la lógica a *una princesa alemana*; la idea fue recogida por Lambert.

[207] *Fundamentos*, 88, p. 109.

[208] συστοιχίαι, presentes todavía en la terminología lógica, cuando se habla, por imagen, de la *subordinación* de los conceptos. Véase, entre otros escritos, los *Analíticos primeros*, 66, b 27.



No obstante, puede interpretarse esta metáfora orgánica examinando el método de Frege en el punto preciso de la construcción de los conceptos, tanto en los *Fundamentos* como en las *Grundgesetze*. En la primera obra, Frege enumera tres medios, a primera vista igualmente aceptables, para obtener un concepto: según el procedimiento escolástico de la abstracción,[210] o bien componiendo entre sí *características* conceptuales,[211] o bien, en fin, a partir de un contenido proposicional del que se ha quitado un nombre propio de objeto.[212]

El primer procedimiento proporciona, en el mejor de los casos, conceptos empíricos, pero en él, el proceso lógico se confunde con el proceso psicológico. Propiamente hablando, no se trata de abstraer una propiedad —no hay propiedades abstractas—, sino de hacer corresponder a una *propiedad* de objetos una *característica* conceptual, según la relación de descripción ya mencionada. Es el procedimiento del lenguaje común, que ha conservado la tradición aristotélica bajo el nombre de abstracción; no es propio en absoluto de las matemáticas y no sería adecuado para señalar los límites del poder de la razón. Esta repugnancia ante la abstracción no carece de motivo, si se juzga a partir de las normas de la lógica de Frege. La relación de descripción es, en verdad, una asignación, que asocia a un término conceptual una propiedad característica. En el caso vulgar de la abstracción, el modelo es el campo mal definido de la percepción. Y la regla de estricta delimitación del concepto es, en el mejor de los casos, una convención de uso, cambiada sin cesar. Pero, sobre todo, el lenguaje común se fundamenta en un modelo dado e inago-

[209] Solución que se hace posible si se admite que un dominio, según como se entienda, representa un concepto o su extensión, y si se admite la doctrina de Port-Royal sobre la relación entre la extensión y la comprensión.

[210] *Fundamentos*, 34, p. 53.

[211] *Ibid.*, párrafo 49, p. 69.

[212] *Ibid.*, párrafo 74, p. 93.

table, el mundo percibido, que describe por medio de un lenguaje inagotablemente sutil, que acumula procedimientos no homogéneos para describir sus objetos: deícticos, nombres propios, nombres comunes y metáforas. En vano se buscaría una correspondencia exacta entre el procedimiento lógico y los expedientes psicolingüísticos.

El segundo procedimiento, que Frege supone que todavía era ignorado por Spinoza,[213] fue utilizado por Arnauld, Leibniz, Kant y Boole. Es legítimo,[214] pero infructuoso.

Permite obtener, a partir de uno o más conceptos dados, un concepto superior o inferior según la jerarquía del género a la especie, pero sin que esto aumente el campo del conocimiento. El matemático lo utiliza tan poco como el silogismo. Puede juzgarse su debilidad por el hecho de que el lenguaje vulgar es un instrumento lo bastante fino como para realizar una construcción semejante. Es suficiente, observa Frege,[215] reunir las características por medio de una conjunción o una disyunción.

Por el contrario, el último procedimiento es el instrumento preferido por los matemáticos y entra en acción en la definición del número, de la «sucesión serial», del orden o del límite de una función. Pero este procedimiento no trivial requiere, como puede preverse, el aparato de la ideografía.

En el caso de una proposición en la que se reemplaza un signo de nombre propio por una letra sintáctica que indique el lugar vacío del argumento,[216] se obtiene un término conceptual *(Wortbegriff)* y, si se reitera la operación, una relación. Por ejemplo, la proposición

$$1+3=4$$

da la función $\xi+3=4$

y luego la relación $\xi+3=\zeta$

[213] *Fundamentos,* 49, p. 69.

[214] En otros textos, en particular en la revisión crítica ya señalada del libro de Schröder, Frege muestra cómo el esquema de los dominios, que va asociado a la composición de las características conceptuales, puede inducir a error. Esta representación no permite, en efecto, distinguir el conjunto unidad de su único elemento, ni representar el conjunto vacío. Además, este soporte intuitivo es realmente engañoso si se quiere ver en él una representación adecuada de las relaciones lógicas. Ilustra la relación del todo a la parte, que no es una relación lógica. «Los diagramas eulerianos dan de la lógica una imagen coja.» (*K.S.*, p. 210.)

[215] *Fundamentos,* nota 4 del párrafo 88, p. 108.

[216] Frege utiliza con este fin las minúsculas griegas.



Así pues, todo enunciado puede proporcionar materia a la definición de un concepto bajo dos condiciones, de las cuales la segunda es admitida tácitamente en los *Fundamentos.* Estas condiciones atestiguan un análisis extensional del concepto.

La primera es de «completitud» *(Vollständigkeit):* [217] exige que el conjunto de las características sea suficientemente determinado para que de todo objeto pueda decirse si cae o no bajo el concepto. El principio se enuncia en los *Fundamentos* como la exigencia de estricta delimitación de los conceptos. La *completitud* del concepto proviene del hecho de ser aislado a partir de una proposición verdadera y de que el *sentido* de la proposición enumera las condiciones suficientes de todo objeto que caiga bajo ese concepto. De donde resulta que el contenido conceptual es un criterio de identificación de los objetos. Así, todo concepto —en el sentido *fregeano* del término— enuncia un criterio de equivalencia para los objetos que subsume, y toda extensión es una clase de equivalencia.[218] Este análisis de la *completitud* no lo ofrece Frege explícitamente, pero va ligado directamente a la noción de *concepto unidad,* y Frege no se olvida nunca de seguirla. La definición de la continuidad de una función [219] parece haber desempeñado un papel paradigmático en la concepción fregeana:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 \longleftrightarrow \text{def } \Lambda\varepsilon > 0\ \mathrm{V}\alpha > 0\ (0 < |x - x_0| < \alpha \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon)$$

Vemos aquí que el *definiens* es un enunciado con una variable libre, $\varepsilon$ y $\alpha$ son parámetros, *1* y $x_0$ constantes dadas y $f$ una función dada. Se enuncia en qué condiciones *1* es un límite para la función $f$ en el punto $x$ perteneciente al entorno de $x_0$.

La segunda condición es que la definición de un concepto

[217] Véase *Grundgesetze,* II, Parte III, 1 a, Principios de la definición, (1), 56.

[218] A saber, la clase de las *unidades* determinadas por el concepto, en el sentido definido más arriba.

[219] *Fundamentos,* 88, p. 108. Del mismo modo, es el análisis de la integral definida lo que condujo a Frege a introducir en la ideografía la constante de segundo orden en la que reconocemos la cuantificación universal. Véase *Función y concepto.* Damos ahí una simbolización moderna del límite, que aprovecha, eso sí, el análisis de Frege.

venga dada de una sola vez y no por partes *(stückweise)*.[220] Esta condición general se formula en las *Leyes fundamentales* a propósito del concepto general de número, y es una precisión del requisito de *completitud.* Frege se opone a cualquier método de inspiración formalista que pretenda definir los números relativos, racionales, reales y complejos por medio de una extensión de la definición primitiva del número cardinal, subsiguiente a la introducción de nuevas operaciones no definidas sobre los cardinales. Ya que o bien la primera definición era una definición perfecta *(vollständig)* y sus características no podrían convenir entonces a las propiedades de los demás números, o bien no era precisa: en tal caso sería inutilizable.

Los ejemplos de la definición de la continuidad de una función, del número de la *sucesión serial* muestran claramente que la «estructura fina» de los conceptos matemáticos no puede obtenerse por medio de ninguna organización simple de las características conceptuales dadas tan sólo mediante conjunciones o disyunciones —es decir, las operaciones booleanas. ¿Realizó Frege su esperanza, formulada en el apartado 2, de «tomar posesión de los procedimientos generales de la construcción de conceptos» *(Begriffsbildung)*? Por lo que respecta a la aritmética y dentro de los límites de los *Fundamentos* y de las *Leyes fundamentales,* los conceptos *fecundos* se obtienen mediante una combinación finita, por compleja que sea, de las ocho funciones fundamentales de la ideografía[221] y conforme a las reglas de la *delimitación estricta.* Examinemos una vez más la definición del número. Su medio principal es la identidad de dos extensiones de concepto, o una aplicación biyectiva definida sobre estas dos extensiones. Esta última se formula por medio de la cuantificación universal, que es una función de segundo orden; no puede ser expresada dentro de los límites estrechos de la lógica clásica, que Kant todavía usaba. En efecto, de las relaciones que pueden afectar a dos extensiones de concepto, la identidad y la inclusión, el procedimiento de los dominios no ilustra más que la segunda con toda exactitud. Según ese diagrama, o bien los dominios se encabalgan el uno sobre el otro, si las carac-

[220] *Grundgesetze,* II, 57: *Que la definición por partes no es admisible.* El término no está explícito en los *Fundamentos,* pero el principio entra allí en acción en el rechazo de la *ampliación* de la noción de número (cardinal).

[221] Véase el apéndice sobre la lógica de Frege en este estudio.



terísticas de los conceptos son las mismas parcial o totalmente, o bien están yuxtapuestos sin recubrimiento. En este último caso, las características disjuntas deben representar especies distintas. No existe ningún medio para reconocer *(wiedererkennen)* una identidad de extensión si ésta no viene dada ya por la identidad de las características que determinan los conceptos. Las figuras eulerianas ilustran el supuesto juicio de identidad de la lógica clásica,[222] «el hombre es hombre», sin poder mostrar nunca que «el hombre es animal racional». Es sabido que la definición[223] clásica proviene de un razonamiento no analítico, no fundado en la subordinación de conceptos, y del cual ni las series aristotélicas ni los círculos eulerianos constituyen una imagen adecuada. La inducción basa la identidad de conceptos en la identidad de los individuos subsumidos a los conceptos, pero el método, por correcto que sea, es asilogístico, y es abandonado a la actividad perceptiva.

Se ha visto, además, que el concepto «equinumérico al "concepto *F*"» proviene de la saturación parcial de una relación «... equinumérico a ...», obtenida a partir de un enunciado del que se han quitado dos nombres propios. Este procedimiento tan simple es inconcebible en la lógica tradicional. En primer lugar, toda característica de concepto es, en esta última, el reflejo de una propiedad de individuo y no puede representar una relación entre individuos. La razón determinante de esto es que esta lógica está sustancialmente ligada al lenguaje común y que éste utiliza el nombre de la *característica* como nombre de *cosas.* «Hombre» *designa* el concepto y el objeto, en la confusión ya señalada entre denominación (o referencia) y descripción. En segundo lugar, si las características de un concepto o de una relación no son ya, desde el punto de vista ideográfico, los nombres de una propiedad, son entonces una descripción, es decir, una representación lingüística y compleja de esta propiedad o relación. Se puede extraer de ella un nombre propio, sustituirlo por un signo de variable, introducir parámetros..., según las reglas autónomas y estrictas de la sintaxis ideográfica. Por el

[222] Se trata de la identidad material de los objetos, y no de la *substituibilidad* que caracteriza, según Frege, la identidad lógica. Véase *Sentido y referencia.*

[223] La definición de cosas establece, por ejemplo, que el hombre es racional, de donde se puede inferir la sinonimia de los términos «hombre» y «animal racional».

contrario, la lógica clásica trata las características de un concepto como contrapunto exacto de las propiedades de cosas, y no tolera un análisis de las características que no corresponda a la distinción real de una especie subordinada.

Esta relación «más íntima» y «más orgánica» entre las características de un concepto de que habla Frege (p. 111, apartado 88) es en primer lugar la de la composición lingüística de su enunciación. No obstante, según él, el orden lineal del lenguaje común disimula la combinación real de las características determinantes y en particular el nivel de los conceptos, si se intentasen expresar. Por el contrario, la escritura ideográfica expone *(darstellt)* lo que el lenguaje común transcribe mediante perífrasis, en las que sólo figuran conceptos de primer orden. Además, la composición ideográfica transcribe fielmente la textura de los conceptos aritméticos, su génesis o su definición, como se ve en la escritura del número o del límite —es en esto que es verdaderamente una *característica*. En consecuencia, las pruebas que se dan en las *Leyes fundamentales*, y ya en los *Fundamentos*,[224] están basadas directamente en la ideografía, y la escritura simbólica es en sí misma un instrumento de prueba [225] —es en esto que es un *cálculo*. Sería ilusorio pensar que la exposición en símbolos es la formalización ulterior de una prueba, pensada primero en lengua vernácula, y controlada luego mediante la traducción ideográfica. En este sentido, Frege adquirió clara conciencia de que las matemáticas utilizan métodos y exploran un dominio ininteligible y no representable en las lenguas del habla común. Pero la ideografía tiene también un poder que revierte sobre la matemática clásica. Es capaz de expresar la existencia, la igualdad, el encadenamiento real de los enunciados; en resumen, expresa todas las partes del razonamiento que hasta entonces habían sido abandonados a las habilidades y giros estilísticos codificados en el lenguaje ordinario, porque los recursos de la lógica clásica eran demasiado escasos.

El proyecto de la segunda ideografía está contenido enteramente en ia crítica de Kant y en la teoría de las definiciones

[224] De ahí lo extraño del estilo a partir de III, sección 4.

[225] *Grundgesetze*, I. *Pruebas de las leyes fundamentales del número. Observación preliminar*, apartado 53, p. 70: «Las explicaciones que doy cada vez bajo el título de análisis están únicamente para comodidad del lector; podrían ser omitidas sin quitar nada a la fuerza de la prueba, la cual se hallará bajo el título único de construcción.»



conceptuales «fructíferas». Pero los *Fundamentos*, obra no técnica, redactada antes de que la ideografía hubiese alcanzado su perfección en la nueva versión, no podía describir las virtudes de ésta más que por medio de una metáfora, la de la planta contenida en el grano y con algunas ilustraciones, como la de la *sucesión*, sacada de la primera ideografía.

Capítulo quince

# Crítica de la aritmética formal

Los *Fundamentos* terminan con un examen de los números reales, paralelo —a pesar de su brevedad— al de los números cardinales. Los números reales *(Zahlen)* deben ser definidos, al igual que los cardinales *(Anzahlen)*, por medio de un juicio de reconocimiento referido a extensiones de conceptos. Pero la identidad de método no excluye que sea necesaria una nueva definición, pues estos números difieren esencialmente de los cardinales y no se podrían conseguir con una ampliación cualquiera de la noción de cardinal.[226]

El primer obstáculo para la construcción lógica de los cardinales era su familiaridad ilusoria y la evidencia imperiosa de la aritmética del ábaco. De ello resulta una apelación constante y tácita a la intuición, una confusión entre las unidades del número y los objetos que se cuentan. El caso de los números reales y complejos es distinto; ninguna intuición puede ocultar la necesidad de definirlos. Ahora bien, el secreto de su verdadera naturaleza, a la vez que su innegable presencia y utilidad en los cálculos, impulsó el desarrollo de una teoría aritmética formal.

El formalismo, que ignora el contenido propio de la aritmética, y al cual Frege opone su propia doctrina,[227] que también es formal por lo que respecta a la administración de las pruebas, es víctima de una ignorancia y de un desprecio. Ignora que las matemáticas, si son una ciencia, son un lengua-

[226] Como se verá, los números reales se definen como relaciones de magnitudes. Los números positivos 1, 2, 3, ... son un subconjunto de los reales y difieren esencialmente de los cardinales. La ideografía reserva para estos últimos una escritura especial: las cifras árabes usuales tachadas con un trazo oblicuo.

[227] Frege entrevé y alcanza el formalismo contemporáneo en nombre de su propia construcción lógica, que se podría denominar también «formalismo» —y todos los formalismos que se han desarrollado desde principios del siglo XX han tenido en cuenta la lección de Frege. Para evaluar exactamente el sentido de las críticas de Frege, es preci-

je, y por lo tanto, que sus elementos son signos [228] y que no se puede rechazar, sin incoherencia, todo sentido y todo contenido a esos signos. El desprecio es el mismo que sienten los algebristas hacia la lógica, que se considera estéril y «filosófica».[229] La crítica del formalismo converge, en este punto, con las correcciones que Frege acaba de aportar a la teoría kantiana de los enunciados analíticos. En efecto, tan sólo una lógica que tenga la potencia de una característica y la certeza de un cálculo puede oponerse eficazmente al formalismo de la combinatoria de los signos.

Los argumentos e ironías de Frege contienen una misma crítica, subrayada ya incansablemente en otros escritos. Si los símbolos de la aritmética son signos vacíos o, lo que viene a ser lo mismo, si los objetos de la aritmética son estos signos mismos reducidos a su puro grafismo, se niega al signo su naturaleza de signo. Las leyes de la aritmética serían entonces las reglas de un juego cuyos signos serían las piezas.

so leer la conferencia, contemporánea a los *Fundamentos*, titulada *Sobre las teorías formales de la aritmética*, de la cual citamos a continuación dos párrafos (*K.S.*, p. 103), y la introducción crítica a la teoría de los números reales en las *Grundgesetze*, II (párrafos 55 a 164, en particular 156 a 159).

«Bajo el nombre de *teorías formales*, hablaré de dos concepciones de la aritmética. Con la primera estoy plenamente de acuerdo, e intentaré refutar la segunda. La primera afirma que todos los enunciados aritméticos pueden ser deducidos a partir de definiciones por vías puramente lógicas y que así deben serlo. En este sentido, la aritmética se opone a la geometría, la cual —ningún matemático lo duda, estoy seguro— necesita axiomas propios y tales que los axiomas contrarios resultarían, desde el punto de vista de la lógica, igualmente aceptables, es decir, exentos de consecuencias contradictorias...

»...Paso ahora a la otra concepción ... Ésta afirma que los signos de los números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, el número $\pi$, etc., son signos vacíos.»

[228] Todo enunciado científico debe ser tratado ante todo como elemento de un lenguaje bien hecho (véase el artículo *Sentido y referencia*). Todo enunciado aritmético es un enunciado de un lenguaje que usa solamente funciones lógicas, y cuyos objetos se construyen por medio de una teoría pura de las extensiones (o conjuntos). Aquí se manifiesta la primacía del punto de vista de la referencia —hoy se diría del punto de vista semántico. Sobre la analogía engañosa entre la aritmética y el juego de ajedrez, véase *Grundgesetze* II, 86 a 137.

[229] De la conferencia ya citada, hay que leer el párrafo en el que Frege prevé el desarrollo de la lógica matemática y de su vínculo con la teoría abstracta de conjuntos:

«Si esta teoría formal [la que Frege defiende] es justa, la lógica no



Pero entonces la aritmética no podría ser una ciencia con enunciados verdaderos o falsos —es decir, verificables en un dominio, el de los números, exterior a los enunciados. Si se considera que el tipo de juicio aritmético más común es la identidad, ¿cómo daría cuenta de ella la aritmética formal? Porque identificar —o igualar— es reconocer un mismo objeto bajo dos designaciones distintas. En resumen, se manejan peones y esta estrategia se cierra sobre sí misma; pero se alcanzan los objetos de la aritmética mediante la interpretación de un lenguaje. Afirmar que las reglas de un juego son *análogas* a una sintaxis, es decir demasiado. La sintaxis lo es de un lenguaje y todo lenguaje requiere un modelo o, por lo menos, la posibilidad de un modelo en que los símbolos del lenguaje reciban su asignación.

Frege no ignora que el formalismo es operatorio y provisional. Por decisión propia, un formalismo tal investiga únicamente las compatibilidades de las reglas de composición, con toda independencia de los objetos a los que se aplican; estas reglas indican las condiciones que deben satisfacer los objetos, son una definición implícita de éstos. En este punto de la argumentación, Frege sospecha [230] que pueda darse una confusión entre concepto y objeto. El formalista toma como criterio de sus conceptos la no contradicción.[231] Ahora bien, no hay por qué desterrar un concepto por la única razón de que contenga contradicción —ya se ha visto que la definición del conjunto vacío y del cero va ligada a la existencia de un concepto contradictorio. El error sería afirmar que un concepto tal subsume algún objeto. Acaso la no contradicción de un concepto garantiza que éste sea satisfecho por un objeto? Si la existencia de un objeto es criterio de la no contradicción de un concepto que lo subsume, y el *único* criterio,[232] la inferencia inversa es falaz. Un concepto define las propiedades de un objeto, pero, repitámoslo, esta relación de representación no es ni una denominación ni una descripción definida

puede ser tan estéril como parece a una mirada superficial y no sin culpa de los lógicos.

»...Por otra parte, conviene recordar a los lógicos (filósofos) que no pueden conocer verdaderamente su propia ciencia si no se interesan por la aritmética.»

[230] *Fundamentos*, 97, p. 116.

[231] *Fundamentos*, 92, p. 112.

[232] *Fundamentos*, apartado 95, p. 114. Frege no admite más que una prueba directa de la no contradicción de un concepto, a saber, la asignación de un objeto que cae bajo ese concepto.

y, salvo el caso particular del segundo nivel, no se refiere a la existencia. Finalmente, Frege da como tercera razón, que la no contradicción de un concepto no es evidente a primera vista. Un concepto aparentemente sano puede revelar ser contradictorio, y por tanto vacío. Vemos que hay que abandonar la interpretación según la cual la lógica de Frege sería «intensional» y asociaría imprudentemente a todo concepto la colección de los objetos que lo satisfacen. Ésta sería más bien la imprudencia cometida por los formalistas. Para Frege, un concepto es una función cuyo valor es lo verdadero. Según los apartados 73 y 75, todo concepto contradictorio es equinumérico al concepto «no idéntico a sí mismo». O bien, la función que representa este concepto no está definida. Así, pues, si un concepto es una determinada aplicación entre un dominio de objetos y lo verdadero, se ve que un concepto contradictorio es, en la teoría fregeana, indiscernible del conjunto vacío; y el criterio de la no contradicción de un concepto es puramente extensional. En consecuencia, si se añade un nuevo concepto a un conjunto de conceptos anteriores, el primero es compatible o incompatible según que esté definido o no sobre todo dominio que verifique los demás conceptos. Por otra parte, si a un conjunto de conceptos dado, verificado por un dominio de objetos dados —por ejemplo, los números positivos— se le añaden nuevos objetos, hay que asegurarse de que el nuevo dominio siga siendo un dominio veritativo para el conjunto de los conceptos.[233] En estas prescripciones se reconoce una anticipación muy lúcida de la teoría de modelos que debe completar un sistema formal. La evidencia intrínseca del texto de Frege viene confirmada por la exégesis que él mismo dio de estos pasajes en una carta a Husserl. Lamenta haber empleado, en su polémica contra el formalismo, el término neutro y aún no especializado de sentido *(Sinn)*, cuando en lo que pensaba era la denotación (significado) *(Bedeutung)*.[234]

[233] *Fundamentos*, 94, p. 114, observación a la prueba de Hankel que se refiere a un cuerpo de números complejos cerrado, respecto a las operaciones de adición y multiplicación; y apartado 96, p. 115. Véase también *Grundgesetze*, I, 31, p. 49, sobre la introducción de las extensiones de concepto.

[234] Carta a Husserl del 24 de mayo de 1981. En particular, Frege corrige el apartado 97, p. 115: «No tenemos derecho a considerar que la expresión "la raíz cuadrada de —1" tiene una *referencia.*» Véase también apartado 101, p. 119: lo esencial, dice Frege, es dar una referencia a las expresiones $a + b$, sea cual sea, suponiendo que sea posible hallar una.



Si bien Frege examinó minuciosa y severamente el formalismo de Hankel, no ignoró su fecundidad. El sentido de sus críticas es el de distinguir entre lo que es la base del álgebra, la teoría general de las leyes de composición y sus propiedades,[235] y lo que, en la concepción de Frege, corresponde propiamente a la aritmética: la construcción de objetos y de clases de objetos a los cuales se aplican estas operaciones.

[235] *Fundamentos*, 99, p. 117.

# Capítulo dieciséis

# Los números reales

La moraleja de estas críticas es que la aritmética formal, que se regula solamente por la no contradicción de los conceptos, se fía de un instrumento de análisis insuficiente.[236] Los números reales son radicalmente distintos de los números cardinales. Éstos responden a la pregunta: ¿cuántos?, y enumeran colecciones discretas; los primeros miden una magnitud continua con relación a una unidad. La aritmética formal es incapaz de señalar esta diferencia, y cuando ésta tiene importancia, la saca subrepticiamente de la «aritmética material» *(Inhaltliche Arithmetik)*.[237]

Los números reales y los complejos[238] son relaciones; al igual que los cardinales, deben ser identificados por medio de una construcción lógica. A partir de estas dos evidencias, la obra aritmética de Frege se presenta como la prolongación y el fundamento de la teoría newtoniana del número. Ésta es evocada ya en el examen crítico que constituye la primera sección de los *Fundamentos* (apartado 19, pp. 45-46): «Newton entiende por número no tanto un conjunto de unidades como la relación abstracta de una magnitud respecto de otra de la misma naturaleza tomada como unidad.[239] Puede admitirse que es una descripción pertinente del número, tomado en el

[236] Véase la cita de Hankel, 92, p. 112: «El matemático considera imposible únicamente lo que es lógicamente imposible, es decir, aquello que implica contradicción», y las observaciones de Frege.

[237] Frege opone *Formale Arithmetik* a *Inhaltliche Arithmetik.* Hoy día se opondría el *álgebra* a la *aritmética,* que es, según Frege, la determinación de los conjuntos sobre los que se definen estas estructuras. Pero hay que entender álgebra en el sentido preciso de: ciencia de las estructuras y leyes de composición, y no en el sentido laxo en que se hablaba en el siglo XIX de «números algebraicos», de manera que, según la definición de Littré: «El álgebra es la ciencia de las magnitudes consideradas de una manera absolutamente general y bajo signos generales.»

[238] *Fundamentos,* 103 y 104, pp. 120-121.

[239] Esta concordancia con la concepción de Newton aparece confirmada en las *Leyes fundamentales.* Véase *Grundgesetze* II, 157, nota: «Nuestro acuerdo con Newton aquí es total.»

sentido más amplio, comprendidas las fracciones y los números irracionales; pero hay que suponer ya dados los conceptos de magnitud y de relaciones de magnitudes. «Hay que definir, pues, la relación *(Verhältnis)* y el dominio de las magnitudes *(Grössengebiet)* que verifican esta relación. El apartado 19 entero, así como la breve indicación del apartado 104 [240] indican que Frege se halla, en 1884, en posesión del plan general de la construcción, expuesto en el tomo II de las *Leyes fundamentales*.[241] Partiendo de una indicación de Gauss, las magnitudes se definen como el campo de una relación:

«Los números positivos y negativos sólo tienen aplicación cuando lo enumerado tiene un opuesto, es decir, un [elemento] que, unido al primero, lo iguala a cero. En verdad, esta condición sólo se verifica si no son sustancias (objetos que se puedan pensar por separado), sino relaciones entre dos objetos lo que se enumera. Con esto se presupone que estos objetos están ordenados en una sucesión determinada, por ejemplo: A, B. C, ... y que se puede considerar idéntica la relación de A con B a la de B con C, etc. El concepto de oposición no es otra cosa que la formulación de los términos de la sucesión, de modo que si la relación (o el paso) de A con B es + 2, la relación de B con A debe ser representada por —2. Si esta sucesión es ilimitada en ambos sentidos, todo número real es la relación de un miembro cualquiera de la sucesión, tomado como origen, con otro miembro de la sucesión.[242]

Un dominio de magnitudes puede ser construido a partir del conjunto infinito de los cardinales definidos precedentemente. En primer lugar, este dominio debe tener más elementos que el conjunto infinito de los cardinales finitos. A este fin, Frege construye el conjunto de las partes del conjunto de los cardinales finitos: «Si la extensión de un concepto subordinado al concepto *cardinal finito* se denomina una *clase de cardinales finitos*, entonces el concepto [ser una] *clase de cardinales finitos* tiene [como número] un cardinal infinito superior al infinito [numerable]. Es decir, el concepto *cardinal finito* puede aplicarse en el concepto *clase de cardinales finitos*, pero no a la inversa.» [243]

[240] *Fundamentos*, p. 121: «Sería demasiado largo exponer con detalle la demostración.»

[241] Y ejecutado muy parcialmente. Frege no va más allá de la definición de una *Positivklasse*, es decir, de una clase de magnitudes definidas sobre un dominio continuo y sobre el cual se puede definir un límite por medio de la relación > y de su inversa (*Grundgesetze*, II, 173, p. 169).

[242] GAUSS: *Werke*, tomo II, p. 176, cita de Frege en *Grundgesetze*, II, 162, p. 159.



Falta por definir, en segundo lugar, sobre este conjunto infinito, los números reales como campo de una relación, por el método siguiente. Todo lo real es representable [244] como suma de un cardinal más una sucesión infinita de fracciones:

$$r + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{1}{2^{n_k}} \right\}$$

Se trata pues de un par, cuyo primer término es un cardinal y cuyo segundo término es un conjunto infinito enumerable de pares que debe dar contenido a la definición explícita de un límite. La construcción de los cardinales alcanza su objetivo en la de los reales.[245] Al constituir esta teoría abstracta de las magnitudes, Frege reanuda sus primeros trabajos,[246] pero esta teoría está aquí enteramente desarrollada dentro de los límites de la lógica y de la ideografía: «Si, en aras de la brevedad, se dice *relación* en lugar de "extensión de una relación" [*Umfang einer Beziehung*]... las relaciones de magnitud o números reales son *relaciones* de *relaciones*. Nuestros dominios de magnitudes *(Grössengebiete)* son clases de *relaciones*, a saber la extensión de conceptos subsumidos al concepto *relación*.»[247]

[243] *Grundgesetze*, II, 164, p. 161.

[244] Frege toma como hilo conductor de su exposición programática la definición habitual del número real. *Grundgesetze*, II, p. 161, 164.

[245] *Fundamentos*, 19, p. 35: Inmediatamente después de haber relatado la doctrina de Newton sobre los números, Frege añade: «En consecuencia, parece que no es superflua una definición del número en sentido estricto, es decir, del número cardinal.»

[246] Tesis *Venia docendi*, defendida en Jena en 1874: *Métodos de cálculo fundados en una extensión del concepto de magnitud.*

[247] *Grundgesetze*, 87, p. 99.

Capítulo diecisiete

# El racionalismo de Frege

Dos fórmulas, aparentemente contradictorias, dan su figura propia al racionalismo de Frege. Según la primera,[248] «la aritmética no es sino un desarrollo de la lógica, todo enunciado aritmético es una ley lógica, si bien derivada... *Calcular sería deducir.*» [249] Mientras que por la segunda,[250] la ideografía procede «según algunas formas fijas, a la *manera de un cálculo*». La primera aserción identifica calcular y deducir, en beneficio de la deducción lógica. La segunda propone una comparación entre lo que comúnmente se entiende por cálculo y una deducción formal lógica. La diferencia no se establece materialmente entre la grafía de un cálculo simbólico y la realización de una prueba formal —y la comparación es legítima entre las escrituras—; la diferencia se debe a los principios mismos. Un cálculo tiene reglas que, dentro de ciertos límites, provienen de la arbitrariedad del calculador; la lógica de Frege tiene leyes que derivan de consideraciones semánticas generales y de definiciones.[251]

El homenaje que Frege rinde a Kant no tiene un aire forzado, a pesar de las críticas que lo preceden. Frege alaba a Kant por haber distinguido los enunciados analíticos de los enunciados sintéticos a priori. Éstos dependen, además de las definiciones y leyes lógicas fundamentales, de uno o más axiomas, cuyo efecto es restringir el campo de aplicación de los enunciados demostrados con la ayuda de aquéllas. Las primeras son universalmente verdaderas, en todo dominio de objetos y sea cual fuere la naturaleza de estos objetos. Lo cual resulta válido para las tesis de la lógica, pero también

[248] *Fundamentos*, 87, p. 108.
[249] En esta cita y en la siguiente, el subrayado es nuestro.
[250] *Fundamentos*, 91, p. 112.
[251] En particular, la lógica de Frege no posee axiomas, en sentido estricto. Es sabido que, en la 2.ª sección de la *Begriffschrift*, Lukasiewicz identificó los axiomas del cálculo de enunciados que lleva su nombre. En verdad, estas fórmulas son tesis verificadas semánticamente y mantenidas por su comodidad.

para los enunciados de la teoría de los cardinales.[252] La inclusión de la aritmética cardinal en la lógica es pues una extensión del *Organon* de la tradición. La lógica de la ideografía está provista, así, de un lenguaje lo suficientemente sutil y completo como para regular su propio desarrollo a partir de las definiciones y leyes primitivas, y para constituir una ciencia pura: la aritmética. Bajo el primer aspecto, es una ciencia de las funciones de verdad y de la cuantificación, o sea, a la vez ciencia y teorías de la ciencia. Deduce en su interior sus enunciados, y proporciona a cualquier otra ciencia la forma de su lenguaje y sus reglas de deducción. Bajo el segundo aspecto, la teoría de la cuantificación es una teoría de las extensiones de concepto y de las aplicaciones biunívocas, definidas sobre extensiones de concepto (ley V). O también, es una teoría abstracta de conjuntos que se funda *en las propiedades de la relación de equivalencia.* La ideografía y su objeto propio, la teoría de las extensiones carecen de cualquier aportación de la intuición. «Se podría decir, modificando una frase conocida, que el objeto propio de la razón es la razón.» [253]

Prosiguiendo con rigor las intenciones epistemológicas del racionalismo crítico, Frege lo modificó profundamente. Llevó el tribunal de la razón hasta un dominio respetado por Kant, la ciencia lógica clásica, la de los conceptos nombres comunes, la de las representaciones generales y discursivas,[254] que se llama también lógica de términos. Denunció la colusión entre la gramática general y la lógica, la confusión entre una extensión de concepto y un conjunto material de objetos, heredada también de las sugerencias del lenguaje. Pero dio al mismo tiempo un sentido nuevo y legítimo a la metáfora de la revolución copernicana: la construcción de la aritmética de los cardinales muestra que es posible ir de los conceptos a los objetos, con la condición de que estos *objetos lógicos* sean extensiones de concepto, y estos conceptos sean «unidades». La metáfora no tiene aplicación fuera de la aritmética y del análisis, que miden exactamente el campo de la razón pura, de ahí su atractivo.[255]

[252] *Fundamentos,* 24, p. 41.
[253] *Fundamentos,* 105, p. 122.
[254] KANT: *Lógica.* Sobre los conceptos, apartado 1.
[255] *Fundamentos,* 105, p. 122.

# Apéndice 1

Podemos considerar paralelamente los ensayos de Frege (*Fundamentos de la aritmética,* 1884), de Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen,* 1887) y de Peano (*Arithmetices Principia,* 1889),[1] comparando sus métodos respectivos. El ensayo de Dedekind, concebido durante la misma época que los *Fundamentos* y publicado tres años más tarde, es enteramente independiente de la construcción fregeana. Peano había leído a Dedekind, pero ignoraba la obra de Frege. Con todo, Peano procede axiomáticamente y permanece próximo a su predecesor Grassmann, a quien se debe la primera axiomática, todavía imperfecta, de la aritmética.[2] Así, pues, Dedekind ocupa una posición intermedia entre Frege y Peano. Por una parte, define las nociones primitivas que Peano introduce axiomáticamente, por ejemplo, las nociones de *cadena* y de *número natural;* por otra parte, pretende definirlas por medio de nociones lógicas generales, sin apelar a ninguna noción aritmética específica.[3] En esto, el ensayo de Dedekind es afín a la investigación lógico-matemática de Frege. Pero si se compara el aparato lógico puesto en juego, las relaciones son más complejas. Dedekind utiliza una teoría ingenua de conjuntos, que denomina *sistemas,* y no distingue, en particular, la pertenencia de la inclusión. Peano utiliza una lógica de

[1] La traducción inglesa se ha editado con una introducción en *A Source Book ...,* p. 83.
[2] H. GRASSMANN: *Lehrbuch der Arithmetik,* 1861. Véase Hao WANG, *La axiomatización de la aritmética,* en *A Survey of Mathematical Logic,* página 70.
[3] «¿Cómo podríamos despojar estas propiedades [fundamentales de la serie N] de su carácter específicamente aritmético, de manera que sean subsumidas por conceptos más generales, y provengan de actividades del entendimiento que son necesarias a todo pensamiento, pero al mismo tiempo suficientes para garantizar la legitimidad de las pruebas y su *completitud,* y para permitir la construcción de conceptos y definiciones consistentes?» (Carta a Keferstein, 27 de febrero de 1890.)

clases en que se hace esta distinción, pero, con una ideografía que es menos perfecta que la de Frege, ignora la cuantificación y las reglas de inferencia.

Si se comparan los *Fundamentos* con los *Principia arithmetices* por su contenido, la construcción de Frege cubre un dominio mucho más restringido [4] que la aritmética de Peano. Dentro de estos límites, los axiomas de Peano son equivalentes a los enunciados siguientes de los *Fundamentos*, demostrados o demostrables en la ideografía:

La definición general del número se da en el apartado 68.

0 es un número (apartado 74).

El sucesor de 0 es un número, a saber 1 (apartado 77).

0 no es el sucesor de ningún número, pero cualquier otro número es un sucesor (apartado 78) (6).

Dos números diferentes no tienen el mismo sucesor, o lo que es lo mismo, la relación «seguir en la serie natural de los números» es biunívoca (apartado 78) (5).

Estos enunciados son teoremas de las *Grundgesetze;* Frege dio, en una nota (*Grundgesetze* I, apartado 44, p. 59) y para algunos de ellos, los números de los teoremas correspondientes.

[4] Frege define los números y expone las leyes fundamentales de la aritmética. Peano trata, además, de las operaciones aritméticas.

# Apéndice 2

# Notas sobre la ideografía

La ideografía de las *Leyes fundamentales*, que constituye los primeros 52 parágrafos del tomo I, difiere de la *Begriffsschrift* por su vocabulario, sus leyes primitivas y su alcance. Esta última contenía una exposición del cálculo de enunciados, la primera formulación de la teoría de la cuantificación, una teoría de la igualdad y la definición de *sucesión*. La segunda ideografía se divide en dos partes. La primera, titulada *Signos primitivos*, es una teoría general de las funciones lógicas; con ella se construye un lenguaje cuya potencia es superior a la del cálculo clásico de predicados. Frege caracteriza aquí, sintácticamente, los signos primitivos, da las reglas semánticas de las que dependen la verdad o falsedad de las fórmulas, las reglas de deducción y las leyes lógicas fundamentales. La segunda parte está dedicada a las definiciones. Y la tercera sección de la *Begriffsschrift* ofrecía la definición de sucesión, pero el programa de esta segunda parte es mucho más extenso. Se encuentra aquí una definición de la función $\xi \cap \zeta$ que asocia un elemento a una clase,[1] la definición del producto cartesiano, las de una función epiyectiva, de la función inversa de una función dada y de una aplicación biunívoca. A continuación vienen la definición general del número, de $\varnothing$, de 1 [2] y de la sucesión. Estas definiciones aparecen transcritas en signos ideográficos a partir de los textos de los *Fundamentos* a los que Frege remite. Esta segunda parte considera, pues, los *Fundamentos* como parte integrante de las *Leyes fundamentales*, y sitúa exactamente su lugar estructural entre los signos primitivos de la ideografía y el cuerpo de teoremas aritméticos. Es la extensión del *organon ideográfico*, que asegura la continuidad

[1] *Grundgesetze* I, 36, p. 54.

[2] En las *Leyes fundamentales*, Frege acentúa la diferencia entre número cardinal y número real, atribuyendo a los primeros las cifras usuales tachadas.

entre los dominios tradicionalmente diferenciados de la lógica y las matemáticas.[3] El vínculo lo constituye la teoría de la cardinalidad.

## 1. Los signos primitivos

En el apartado 31, Frege hace un balance de los signos introducidos y enumera ocho *nombres* de funciones primitivas. Estas ocho constantes son clasificadas según dos criterios: el número de argumentos (1 ó 2) y el nivel de las funciones (1, 2 ó 3). Aquí las agruparemos de modo que sea más fácil una comparación con la *Begriffsschrift* (1879) y los signos del cálculo de predicados llamado clásico. Contamos con:

1. Tres functores proposicionales:

—ξ: esta función tiene por valor lo verdadero si su argumento tiene por denotación lo verdadero, lo falso si su argumento no tiene por denotación lo verdadero. Podría caracterizarse esta función como un operador proposicional en el sentido de que obliga a tratar los signos que le siguen como un todo que constituye un contenido enunciativo.

┬ ξ: la negación.

Es una función definida sobre el conjunto {V, F} y con valores en {V, F}.

— ξ: la implicación, igualmente definida sobre {V, F} y

└ξ

con valores en {V, F}.

Obsérvese que estas dos últimas funciones están definidas sobre el conjunto de los valores de la primera y presuponen que ésta ha sido aplicada ya a los argumentos.[4]

2. Una constante de predicado con dos lugares: la igualdad

$$\xi = \zeta$$

3. Un operador de descripción, que tiene la misma misión que el artículo definido en las lenguas usuales, para una, por lo menos, de sus funciones:

$$\backslash\, \xi$$

[3] Sobre la necesidad de esta distinción y el carácter irreductible o no de la relación de pertenencia, véase QUINE: *Elementary Logic*, 1 y *Set Theory and Its Logic*, p. 9.

[4] Este hecho se traduce en la escritura misma, en la que se reconoce el trazo horizontal: —, que Frege llamó primero *Inhaltsstrich* (trazo de contenido), y luego *Waagerecht* (horizontal).



Este operador se introduce para elegir el único individuo de una extensión de concepto, que hay que distinguir del individuo por sí mismo.

4. Dos constantes de segundo nivel. La primera corresponde a la cuantificación universal, la otra tiene por valor la extensión de un concepto de primer nivel tomado como argumento:

$$\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \Phi(\mathfrak{a}) \qquad \grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$$

Esta última función define un conjunto, la primera una aplicación entre todos los elementos de un conjunto y el punto *verdadero* del conjunto {*verdadero, falso*}.

5. Una constante de ter[cer] orden que permite enunciar una propiedad general de una función de segundo orden

$$\neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!- \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$$

A partir de estos nombres primitivos, cuyo criterio de buena formación es semántico,[5] se podrá definir una aplicación entre extensiones de conceptos y definir la *sucesión*. Las leyes fundamentales siguen el mismo criterio y apuntan al mismo objetivo.

## 2. Las leyes fundamentales [6]

De la *Begriffsschrift*, Frege sólo conserva dos leyes. Estas leyes son:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\!\llcorner\; a \\ \;\;\llcorner\; b \\ \llcorner\; a \end{array}$$

de donde se desprende fácilmente

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\; a \\ \llcorner\; a \end{array}$$

apartado 18, *Begr.* 14.

[5] O referencial, para respetar el vocabulacio de Frege. Véase *Grundgesetze*, apartados 31, 32, 33 y la nota 15 en el apartado 5, p. 9.

[6] La lista viene dada en el apartado 47.

2. La especificación universal para el segundo y tercer nivel (apartado 20 y 25). El primer caso corresponde a la fórmula 98 de la *Begriffsschrift* (apartado 22).
3. La tercera ley se refiere a la sustitución de los idénticos (apartado 20).
4. La cuarta enuncia el principio del tercio excluso bajo la forma: dos enunciados tienen el mismo valor veritativo o valores opuestos (apartado 18).
5. La quinta enuncia el paso de la generalización de una ecuación entre los valores veritativos de dos funciones a la identidad de su recorrido veritativo (apartado 20).
6. La última indica el uso del operador de descripción.

La ideografía es una teoría de las aplicaciones, gracias a las consideraciones y leyes semánticas que desarrolla. Por ello también se diferencia del cálculo de predicados de primer orden con constante de igualdad. No sería suficiente decir que la ideografía es un lenguaje de predicados de segundo orden. El orden, en el sentido en que se entiende habitualmente,[7] difiere del nivel (orden en los *Fundamentos*) de Frege. Y si se quisiera comparar el segundo orden, en el sentido clásico, con el tercer nivel de la ideografía, la comparación seguiría siendo inadecuada.

Frege admite dos constantes de segundo orden. Estas constantes toman por argumento un concepto. Una asocia a un concepto su extensión, la otra enuncia una propiedad de un concepto, a saber, que su extensión tiene una relación con la extensión de otro concepto.[8] La letra gótica que figura en la muesca:

$$\neg\!\underset{\smile}{\mathfrak{a}}\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$$

[7] Véase A. Church: *Introduction to Mathematical Logic*, p. 296.

[8] Éste es el sentido de la función de segundo orden llamada cuantificación. En la exposición sintáctica del apartado 31, Frege escribe:

$$\neg\!\underset{\smile}{\mathfrak{a}}\!-\ \varphi(\mathfrak{a})$$

en que $\varphi$ es una letra sintáctica. Cuando Frege la substituye por un predicado particular, se trata siempre de un predicado complejo:

$$\begin{array}{l} \top\ \psi(\xi) \\ \llcorner\ \Phi(\xi) \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \varphi(\xi) = \psi(\xi)$$

Cuando un predicado tal está sometido a la cuantificación, se afirma que existe una relación entre la extensión de $\varphi$ y la de $\psi$. Véase igualmente el apartado 13 de las *Grundgesetze*, donde Frege analiza el sentido de «todos» y de «algunos».



no es un signo de variable (Frege emplea para esto las letras itálicas), ni una letra sintáctica (Frege reserva para ello las minúsculas griegas). Si se nos permite hacer una innovación para describir un lenguaje diferente del lenguaje Peano-Russell,[9] se podría decir que se trata de un índice semántico que afecta la función sometida a la constante de segundo orden. Por ejemplo en:

$$\neg\!\underset{\smile}{\mathfrak{a}}\!\begin{array}{l} \top\ \psi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\ \varphi(\mathfrak{a}) \end{array}$$

la constante de segundo nivel afirma de las funciones $\varphi(\xi)$ y $\Psi(\zeta)$ que si la primera está definida, la segunda lo está también.

Las funciones de tercer nivel son las que tienen como argumento una función de segundo nivel. No obstante, Frege no da su forma general; en efecto, basta con una sola función de tercer nivel para las necesidades de la ideografía, a saber, la función que enuncia la generalización de una función de segundo nivel (apartado 25). Con esta forma sintáctica única se define la función $\xi \cap \zeta$ (apartado 35), que permite representar una función de segundo nivel por medio del primer nivel, y la función «seguir en una serie-*f*» (apartado 45).

Dado que las funciones de tercer nivel quedan restringidas a una sola forma, la analogía sintáctica entre el segundo y el tercer nivel es de poca utilidad; el sentido preciso de esta función hay que sacarlo de sus usos. Ella interviene en dos definiciones:

1. En el apartado 55, Frege estipula que, dada una función *f* cualquiera, que asocie individuos a lo *verdadero*, se puede definir otra función, igualmente epiyectiva, que asocie los elementos de la extensión a la extensión misma. Es la función $\zeta \cap \xi$.
2. El apartado 45 define una aplicación que se podría parafrasear así: si una función *f* cualquiera es tal que, para todo elemento $x$ de su dominio, si $xRb$, entonces $f(b)$, entonces para todo $d$, si $d$ tiene la relación $R$ con un elemento cualquiera del dominio de $f$, $f(d)$.

Esta función define una extensión de la función *f* con un nuevo elemento, y enuncia en qué condiciones la extensión se perpetúa paso a paso. A partir de una función *f* que cum-

[9] Aunque se diga frecuentemente: la lógica de Frege-Russell. Denominación justificada en muchos otros aspectos. Véase J. van Heijenoort: *Prólogo* a los *Escritos lógicos*, de J. Herbrand.

pla las condiciones enunciadas en el antecedente principal, se puede definir otra función, la aplicación biyectiva que envía todo elemento del dominio de *f* sobre el objeto que le está ligado por *R*. Esta función tiene por dominio y por imagen la extensión de *f* definida por la relación *R*.[10]

Por medio de estas dos definiciones (1) y (2), se puede construir, a partir de una función *f* dada y que satisfaga ciertas condiciones, dos nuevas funciones.

Así, pues, la ideografía, en su forma acabada, incluye la definición de las clases y la de las aplicaciones definidas sobre estas clases; éste es todo el aparato necesario para la constitución de la aritmética cardinal y del análisis. Las nociones esenciales para ello son :

Una clase se define por medio de un *concepto unidad.* Un concepto tal se construye mediante una relación de equivalencia parcialmente saturada por un parámetro. La clase así definida es el conjunto de los casos de verdad del concepto.

La ley V define una aplicación biunívoca: la aplicación idéntica de una clase sobre sí misma.

La relación de equinumericidad es una aplicación biunívoca entre dos extensiones de concepto, definida con una permutación respecto de los elementos.[11]

Por medio de la negación se puede definir además la restricción de una aplicación biunívoca.

Mediante el esquema de función [12] de tercer nivel, se puede definir una aplicación epiyectiva y su inversa.

Mediante este mismo esquema, se puede construir el campo (dominio e imagen) de la relación «sucesión inmediata».

La clase de los números cardinales que pertenecen a la *sucesión* definida precedentemente es una clase infinita.

[10] Se trata, como observó Dedekind, del análogo de la definición de cadena.

[11] Pone de manifiesto la «potencia» en el sentido cantoriano. Esta aplicación definida con una permutación respecto de los elementos es la definición rigurosa de lo que Cantor designa por doble abstracción (del orden y de la naturaleza de los elementos).

[12] Los dos usos de este esquema corresponden a dos aplicaciones del esquema de sustitución de la teoría Zermelo-Fränkel. Véase SUPPES: *Axiomatic Set Theory,* p. 202, y J. L. KRIVINE: *Théorie axiomatique des ensembles,* p. 18.



La ideografía une un lenguaje «de fórmulas» regular a una teoría de clases en que la función $\zeta \cap \xi$ definida por medio de las nociones primitivas del sistema juega el papel de la clásica relación de pertenencia. Los conjuntos se construyen a partir de los dos únicos objetos primitivos, lo *verdadero* y lo *falso,* de la relación de igualdad, del conjunto vacío y del instrumento diversificado constituido por las diferentes especies de aplicaciones. Éstas se definen a su vez únicamente con las nociones primitivas de la ideografía.

Al situar los *Fundamentos* dentro del cuerpo de la ideografía en el lugar que le corresponde, nuestro análisis obtiene el resultado de enunciar explícitamente la perspectiva semántica y extensional que está a la base de la exposición de Frege, en cada uno de sus avances.

El último avance de la ideografía fue la distinción entre sentido y referencia (1892). Ahora bien, cuando Frege hizo un cuadro de las modificaciones aportadas a la nueva ideografía,[13] no presentó esta última distinción en toda su generalidad. La distinción propuesta, por una parte, analiza un contenido de juicio en sentido y referencia (valor veritativo); por otra parte, interpreta una identidad como el reconocimiento de un mismo objeto (referencia) designado por dos sentidos diferentes. En el primer caso, la distinción fundamenta el cálculo de enunciados como cálculo de las funciones veritativas; en el segundo caso permite la identificación de las extensiones de concepto, es decir, la definición por medio de la construcción de clases de equivalencia y la formulación de la ley V. Aunque Frege estuvo muy cerca de concebir con toda su generalidad la relación entre un lenguaje y el modelo en que los elementos del lenguaje tienen una asignación, y aunque la noción de modelo interviene incidentalmente en la crítica de la aritmética formal, él no pasó nunca del análisis de los tres elementos: expresión, sentido, referencia. ¿Dónde radicaba, pues, el obstáculo para este último paso? Se ha visto que el texto de los *Fundamentos* dejaba un punto oscuro, la ambigüedad entre una clase de equivalencia en tanto que es un conjunto y esta misma clase en tanto que elemento del conjunto de las partes.[14] Esta ambigüedad atañe a nuestra

[13] *Grundgesetze,* I, *Introducción,* p. X.

[14] En el análisis precedente de los *Fundamentos,* hemos opuesto la clase de equivalencia al elemento del conjunto cociente. Esta oposición nos ha parecido legítima en el contexto de un análisis general de las relaciones y clases de equivalencia. Pero se puede hacer aparecer la

pregunta; parece que Frege no podía concebir el conjunto más que bajo la forma de un objeto que tenga la forma de un individuo y designado por un nombre propio. Obsérvese también que los únicos objetos admitidos por Frege, dentro de los límites de la ideografía, son los valores veritativos y las extensiones de concepto, de las cuales los números son un ejemplo. Frege elimina a los individuos en el sentido usual del término porque no pertenecen a las concepciones puras de la razón; a este precio, la extensión de un concepto es declarada rigurosamente distinta de los individuos materiales que el concepto subsume. Pero al mismo tiempo se impidió a sí mismo toda posibilidad de distinguir la clase en tanto que multiplicidad de la clase, en tanto que unidad. Y la ideografía no tiene ningún signo para designar la clase-multiplicidad. Esta ausencia de distinción es la raíz de las paradojas que amenazan a la ideografía, y es también el obstáculo para la concepción general del modelo. Si a Frege le repugnaba, con razón, admitir individuos empíricos en su construcción de la aritmética, la definición del concepto unidad habría podido conducirle a concebir la extensión como el campo de los objetos posibles subsumidos por el concepto —lo que hemos llamado los casos de verdad del concepto. Para prolongar la teoría de la referencia en teoría de los modelos puros,[15] sería suficiente tratar las características de un concepto como representación de objetos posibles. Esta precisión fue dada por Wittgenstein.[16]

---

confusión si se utilizan solamente nociones que operen en los *Fundamentos*. Cuando Frege define la identidad de dos extensiones *A* y *B* en tanto que son objetos individuales, está pensando en una relación definida no entre las dos extensiones en cuanto tales, sino sobre $\mathfrak{F}A \times \mathfrak{F}B$.

[15] Cuando un modelo se define únicamente por la cardinalidad del dominio de individuos.

[16] *Tractatus logico-philosophicus*. En particular: 2.103 y 2.0131... (*Der Raumpunkt ist eine Argumentstelle*) y 2.0141: «La posibilidad de ocurrencia [de un objeto] en estados de cosas es la forma del objeto.» Véase asimismo los textos del *Tractatus* que afirman la existencia, en algún sentido virtual, de los «Elementarsätze».

# Índice

## SEGUNDA PARTE

## ESTUDIO DE LOS FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA,

## POR CLAUDE IMBERT